Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 19.01.2018.

III РАЗРЕД

1. Збир цифара броја 457 је $4 + 5 + 7 = 16$. Напиши све парне троцифрене бројеве чији је збир цифара мањи од 4.

2. Прецртај доњу табелу на папир који ћеш предати, па је попуни.

a	210	367			
$a+59$			770	673	
$a+226$					452

3. а) Нацртај круг чији је центар тачка *O* и полупречник 4cm.
б) Затим нацртај две праве *a* и *b* које секу дати круг, међусобно су нормалне, а не садрже центар круга.
в) Нацртај праву *c* која садржи центар круга, сече праву *a*, а не сече праву *b*.
г) У каквом су положају праве *b* и *c*?

4. Премести једну шибицу тако да једнакост постане тачна:

5. Која је најкраћа, а која најдужа од следећих дужина:
2cm + 1m + 8mm,
2cm + 1mm + 8m,
2m + 1mm + 8cm,
2m + 1cm + 8mm.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**ML 52/1**) 100, 200, 110, 300, 210, 120, 102.
[0-2 тачна броја: **0 бодова**; 3-4 тачна броја: **5 бодова**; 5 тачних бројева: **10 бодова**; 6 тачних бројева: **15 бодова**; 7 тачних бројева (под условом да нема нетачних): **20 бодова**.]

2. (**ML 52/1**) [Сваки тачно уписан број **по 2 бода**.]

a	210	367	**711**	**614**	**226**
$a+59$	**269**	**426**	770	673	**285**
$a+226$	**436**	**593**	**937**	**840**	452

3. (**ML 52/2**) Тачно нацртане слике под а), б), в) бодовати са **по 5 бодова**. г) b || c [**5 бодова**].

4. Једно решење је: XVII – IV = X + III [**20 бодова**].

5. Најкраћа: 2cm + 1m + 8mm [**10 бодова**], најдужа 2cm + 1mm + 8m [**10 бодова**].

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**ML 52/1**) За записивање једноцифрених бројева употребљено је 9 цифара [**5 бодова**], за записивање двоцифрених још $2 \cdot 90 = 180$ [**5 бодова**], тако да тражимо 18. цифру у делу броја 100101102103104...2018 [**5 бодова**]. То је цифра 5 [**5 бодова**].

2. (**ML 51/5**) [Сваки тачно уписан број **по 4 бода**.]

13	8	**15**
14	**12**	10
9	**16**	**11**

3. (**ML 52/1**)

а) [**10 бодова**]

$$\begin{array}{r} 5\,\boxed{0}\,3\,\boxed{5}\,\boxed{7} \\ +\ \boxed{6}\,4\,\boxed{9}\,8\,2 \\ \hline \boxed{1}\,1\,5\,3\,3\,9 \end{array}$$

б) [**10 бодова**]

$$\begin{array}{r} \boxed{2}\,1\,\boxed{1}\,0\,\boxed{5} \\ -\ 5\,4\,\boxed{3}\,2 \\ \hline 1\,\boxed{5}\,6\,7\,3 \end{array}$$

4. [**20 бодова**].

$$\begin{array}{r} 811 \\ 181 \\ +\ 118 \\ \hline 1110 \end{array}$$

5. 3000, 2100, 2010, 2001, 1200, 1020, 1002, 1110, 1101, 1011.
[Сваки тачан број **по 2 бода**, сваки нетачан број –1 бод, с тим да укупан збир не буде негативан.]

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 19.01.2018.

IV РАЗРЕД

1. Број 1234567891011121314151617...20172018 је настао тако што су природни бројеви записани редом, без размака. Која је цифра на 207. месту (гледано с леве стране)?

2. Прецртај на папир који ћеш предати дату таблицу, па у празна поља упиши бројеве тако да добијеш „магични квадрат“ (тј. да збирови у сваком реду, колони и дијагонали буду једнаки).

13	8	
		10
9		

3. Препиши наведене записе на папир који ћеш предати, па упиши цифре на празна места тако да рачуни буду тачни.

а)

$$\begin{array}{r} 5\,\square\,3\,\square\,\square \\ +\ \square\,4\,\square\,8\,2 \\ \hline \square\,1\,5\,3\,3\,9 \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} \square\,1\,\square\,0\,\square \\ -\ 5\,4\,\square\,2 \\ \hline 1\,\square\,6\,7\,3 \end{array}$$

4. У датом ребусу замени слова цифрама (једнака слова једнаким, а различита различитим цифрама) тако да сабирање буде тачно.

$$\begin{array}{r} ABB \\ BAB \\ +\ BBA \\ \hline BBBC \end{array}$$

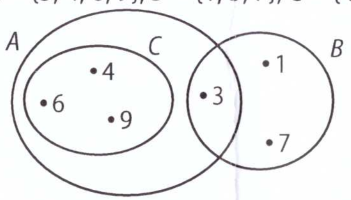
5. Напиши све четвороцифрене бројеве са збиром цифара 3, а производом цифара 0.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**ML 52/1**) $A=\{3, 4, 6, 9\}$, $B=\{1, 3, 7\}$, $C=\{4, 6, 9\}$ [**10 бодова**].



[**10 бодова**]

2. (**ML 52/1**) 8 „вертикалних“ [**6 бодова**], 12 „хоризонталних“ [**7 бодова**] и 6 „косих“ [**7 бодова**], укупно 26 дужи.

3. (**ML 51/5**) Ако су a, b и c дужине ивица тог квадра, онда је $a + b + c = 21\text{cm}$ [**5 бодова**] и, на пример, $a + b = 12\text{cm}$, $ac = 45\text{cm}^2$ [**5 бодова**], одакле је $c = 9\text{cm}$, $a = 5\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$ [**5 бодова**], па је запремина $V = 5\text{cm} \cdot 7\text{cm} \cdot 9\text{cm} = 315\text{cm}^3$ [**5 бодова**].

4. Како је $\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-(10b+a)=9a-9b$ [**5 бодова**], то из $9a - 9b = 3a + 3b$ следи $6a = 12b$, односно $a = 2b$ [**5 бодова**]. Тражени бројеви су 2112, 4224, 6336 и 8448 [1 број: 2 бода, 2 броја: 4 бода, 3 броја: 7 бодова, 4 броја: 10 бодова].

5. На пример: $A = \{1\}$, $B = \{2, 5\}$, $C = \{3, 6, 7\}$, $D = \{4, 8, 9, 10\}$ [**20 бодова**].

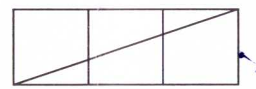
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 19.01.2018.

V РАЗРЕД

1. Нацртај Венов дијаграм и одреди елементе скупова A, B и C ако је:
$$A\cup B\cup C=\{1, 3, 4, 6, 7, 9\},\quad C\cap A=\{4, 6, 9\},$$
$$C\subset A,\quad B\setminus A=\{1, 7\},\quad A\cap B\neq\emptyset \text{ и } B\cap C=\emptyset.$$

2. Колико дужи се може уочити на цртежу?



3. Збир дужина свих ивица квадра је 84cm, обим једне његове стране је 24cm, а површина друге стране је 45cm^2. Израчунај запремину тог квадра.

4. Одреди све бројеве облика $\overline{abba}$ тако да важи $\overline{ab}-\overline{ba}=3a+3b$.

5. Бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 распореди у четири скупа тако да сваки од тих бројева буде тачно у једном скупу и сваки скуп има тачно онолико елемената колики је његов најмањи елемент. Нађи бар једно решење.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**ML 52/1**) $|x+10|+10=30-5$; $|x+10|=15$ [**5 бодова**]; $x+10=15$ или $x+10=-15$; $x=5$ или $x=-25$ [1 решење: 5 бодова, оба решења: 15 бодова].

2. (**ML 52/1**) $-(3-4)-(-(5-6)+7-8)-((-9)+(-10))=$ $1-(1-1)-(-19)=1+19=20$ [**20 бодова**].

3. (**ML 51/5**) а) Из услова задатка следи да је $a=7\cdot m+3$ и $b=7\cdot n+5$ за неке целе бројеве m и n. Онда је $a+b=7\cdot m+3+7\cdot n+5=7\cdot(m+n)+8=7\cdot(m+n+1)+1$, па је тражени остатак једнак 1 [**10 бодова**].
б) $4\cdot a=4\cdot(7\cdot m+3)=28\cdot m+12=7\cdot(4\cdot m+1)+5$, па је тражени остатак једнак 5 [**10 бодова**].

4. Брзине двају дечака су једнаке и сваки од њих за 1 час прелази једну петину растојања између два села. Марко је за 1 час (до 11 часова) прешао једну петину растојања, а затим до сусрета са Илијом још две петине растојања, колико и Илија. Дакле, они су се мимоишли у 13 часова [**20 бодова**].

5. Прва четири проста броја су 2, 3, 5 и 7 [**2 бода**]. Највећи могући остаци које неки број може имати при дељењу са њима су, редом, 1, 2, 4 и 6, па збир тих остатака може бити једнак 13 једино у случају да код броја N који тражимо они имају управо те вредности [**3 бода**]. Одатле следи да је $N+1$ дељиво са 2, 3, 5 и 7, тј. са $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$ [**10 бодова**]. Најмање такво N је $N=210-1=209$ [**5 бодова**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 19.01.2018.

VI РАЗРЕД

1. Одреди x ако је
$$|x+10|+|-10|=|10-40|-|-5|.$$

2. Израчунај
$$-(3-4)-(-(5-6)+7-8)-((-9)+(-10)).$$

3. Број a при дељењу бројем 7 даје остатак 3, а број b при дељењу са 7 даје остатак 5. Одреди остатак при дељењу:
а) збира $a+b$ бројем 7;
б) производа $4\cdot a$ бројем 7.

4. Два друга, Марко и Илија, кренули су један другом у сусрет, идући једнаким сталним брзинама. Марко је пошао у 10 часова из Јасенова и у 15 часова стигао у Брестово, а Илија је пошао у 11 часова из Брестова и у 16 часова стигао у Јасеново. У колико сати су се они мимоишли?

5. Одреди најмањи природан број чији збир остатака при дељењу са прва четири проста броја износи 13.

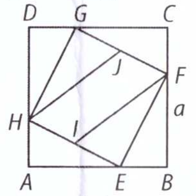
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**ML 52/1**) У троуглу ABF је $BF=\frac{1}{2}AB=7\text{cm}$ [**5 бодова**] и $AF=BF\sqrt{3}=7\sqrt{3}\text{cm}$ [**5 бодова**], па је $FD=AD-AF=2\sqrt{3}\text{cm}$ [**5 бодова**]. Површина правоугаоника BEDF је $14\sqrt{3}\text{cm}^2$ [**5 бодова**].

2. (**ML 52/1**) Означимо страницу датог квадрата са a (слика).



Тада помоћу Питагорине теореме одређујемо страницу b четвороугла $EFGH$ (који је очигледно такође квадрат): из $b^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{5}{9}a^2$ следи $b=\frac{a\sqrt{5}}{3}$ [**5 бодова**]. Четвороугао $HIFJ$ је паралелограм са основицом HI једнаком половини странице квадрата $EFGH$ и висином једнаком тој страници, па је његова површина P једнака половини површине квадрата $EFGH$ [**5 бодова**]. Дакле, $P=\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{5}{18}a^2=40\text{cm}^2$ [**5 бодова**], одакле је $a^2=144\text{cm}^2$ и $a=12\text{cm}$ [**5 бодова**].

3. (**ML 52/1**) $\sqrt{\frac{9}{4}-2}-\frac{\frac{1}{4}}{2}:\frac{9}{4}+\frac{1}{\frac{3}{2}}$ [**5 бодова**] $=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$ [**5 бодова**] $=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$ [**10 бодова**].

4. $|x-\sqrt{2}|-\sqrt{5}=\pm\sqrt{2}$; $|x-\sqrt{2}|=\sqrt{5}\pm\sqrt{2}$ (обе вредности су позитивне); $x-\sqrt{2}=\pm(\sqrt{5}\pm\sqrt{2})$. Једначина има 4 решења:

$$x\in\{\sqrt{5}+2\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}+2\sqrt{2},-\sqrt{5}\}.$$

[Свако тачно решење: 5 бодова; свако нетачно решење –3 бода, с тим да укупан збир не буде негативан.]

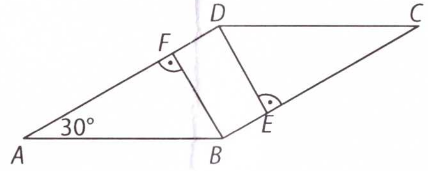
5. На основу неједнакости троугла, за трећу страницу c важи $1 < c < 7$, тј. $c\in\{2, 3, 4, 5, 6\}$ [**5 бодова**]. За $c = 5$ тај троугао је правоугли, а за $c\in\{3, 4\}$ је оштроугли [**5 бодова**]. Због $2^2 + 3^2 < 4^2$ и $3^2 + 4^2 < 6^2$, за $c\in\{2, 6\}$ троугао је тупоугли [**5 бодова**]. Задатак има два решења: $O = 9\text{cm}$ или $O = 13\text{cm}$ [**5 бодова**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 19.01.2018.

VII РАЗРЕД

1. На слици је приказан паралелограм $ABCD$. Из темена B и D конструисане су нормале BF и DE на наспрамне странице. Израчунај површину четвороугла $BEDF$ ако је $AB = 14\text{cm}$ и $AD = 9\sqrt{3}\text{cm}$.



2. Тачке E, F, G и H припадају, тим редом, страницама AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ тако да је $AE = 2EB$, $BF = 2FC$, $CG = 2GD$ и $DH = 2HA$. Тачке I и J су средишта дужи HE и FG, редом. Ако је површина четвороугла $HIFJ$ једнака 40cm^2, израчунај страницу квадрата $ABCD$.

3. Израчунај вредност израза $\sqrt{x-2}-\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{2}:\sqrt{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ за $x=\frac{9}{4}$.

4. Колико решења има једначина $\left||x-\sqrt{2}|-\sqrt{5}\right|=\sqrt{2}$? Одреди сва решења.

5. Дужине страница (изражене у центиметрима) тупоуглог троугла су цели бројеви. Ако две странице имају дужине 3cm и 4cm, израчунај обим тог троугла.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

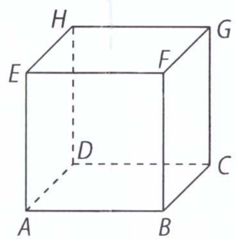
1. (**ML 52/1**) Троугао *MNC* је сличан троуглу *ABC* са коефицијентом сличности $\frac{2}{3}$ [**10 бодова**]. Зато је његов обим $\frac{2}{3}\cdot(16\text{cm}+19\text{cm}+10\text{cm})=30\text{cm}$ [**10 бодова**].

2. (**ML 52/1**) Решавањем прве једначине се добија $x = 3$ [**10 бодова**], заменом у другој следи да је $b = 4$ [**5 бодова**], а заменом у трећој да је $a = 0$ [**5 бодова**].

3. Дата двострука неједнакост је еквивалентна, редом, следећим неједнакостима: $1{,}3<\frac{p-2}{3}\le 7{,}5$ [**5 бодова**]; $3{,}9 < p - 2 \le 22{,}5$ [**5 бодова**]; $5{,}9 < p \le 24{,}5$ [**5 бодова**]. Прости бројеви *p* који задовољавају последњи услов су 7, 11, 13, 17, 19 и 23 [**5 бодова**].

4. Ако број 2 није решење дате неједначине, онда неједнакост $(a + 3)\cdot 2 > 5$ није тачна, већ важи $(a + 3)\cdot 2 \le 5$ [**10 бодова**]. Решавањем ове неједнакости по *a* се добија $a\le-\frac{1}{2}$, тј. $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ [**10 бодова**].

5. Има укупно 9 таквих равни, и то су:
- три равни одређене странама коцке *ABCD*, *ABFE* и *ADHE* [**6 бодова**];
- три равни које садрже дијагоналне пресеке (одређене са по две паралелне ивице): *ABGH*, *ADGF* и *AEGC* [**7 бодова**];
- три равни које секу коцку по једнакостраничним троугловима: *ACF*, *ACH* и *AFH* [**7 бодова**].



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 19.01.2018.

VIII РАЗРЕД

1. Кроз тежиште троугла *ABC* конструисана је права паралелна страници $AB = 16\text{cm}$ која странице $AC = 19\text{cm}$ и $BC = 10\text{cm}$ сече у тачкама *M* и *N*, редом. Израчунај обим троугла *MNC*.

2. Једначине

$$(x+5)^2-60=(x-1)^2,\quad \frac{x+1}{4}+\frac{2x+1}{7}=b-2,\quad 2a-3b+4x=0$$

имају исто решење по непознатој *x*. Израчунај *x*, *a* и *b*.

3. Одреди све просте бројеве p за које је тачна неједнакост

$$0{,}3<-1+\frac{p-2}{3}\le 6{,}5.$$

4. Одреди све вредности броја *a* за које број 2 није решење неједначине (по *x*):

$$(a+3)x>5.$$

5. Дата је коцка *ABCDEFGH*. Колико има равни које садрже најмање три од темена коцке, при чему је *A* једно од тих темена?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.