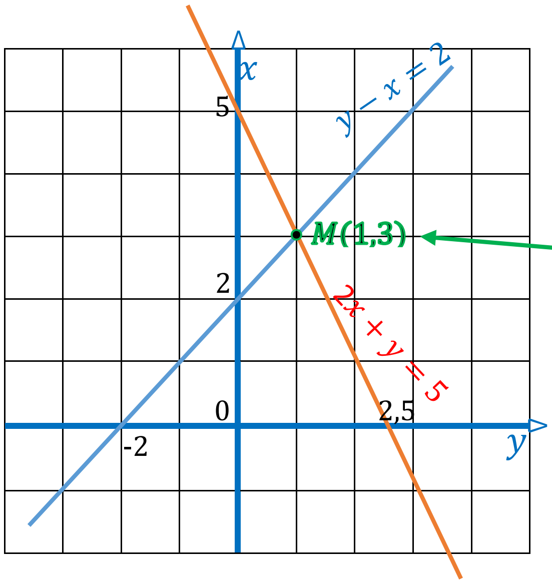
Систем од две линеарне једначине са две непознате

Еквивалентност система

Прошли час смо видели шта је линеарна једначина са две непознате. Такође смо рекли да се скуп свих њених решења може представити графички, и да је то скуп свих тачака праве дате том једначином.

Било је речи и о томе да није баш „уобичајено“ да линеарна једначина има бесконачно решења, као и да ћемо се бавити, не једном, већ са две линеарне једначине са две исте непознате и тражити њихово заједничко решење.

Па, да видимо како то изгледа графички. За једну једначину узећемо ону са претходног часа $2x + y = 5$ а за другу, нпр $y - x = 2$. Представимо решења обе једначине у истом координатном систему.



Дакле, свака тачка праве је решење једначине. Наиме, свака тачка са својим координатама је уређени пар који је решење једначине.

Видимо да се ове две праве секу, и то у тачки $\boldsymbol{M(1,3)}$ што значи да та тачка припада и једној и другој прави.

Проверимо да ли је уређени пар M(1,3) решење обе једначине:

$2x + y = 5$ $\qquad$ $y - x = 2$

$2 \cdot 1 + 3 = 5,\ \mathrm{T}$ $\qquad$ $3 - 1 = 2,\ \mathrm{T}$

Дакле, уређени пар (1,3) јесте решење обе једначине.

*Две линеарне једначине са две непознате, којима тражимо заједничко решење, чине **систем** од две линеарне једначине са две непознате.*

Систем од две једначине са две непознате, нпр. ове које смо представили графички, пишемо овако:

$$\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ \underline{-x + y = 2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ -x + y = 2 \end{array}\right\}$$

Пишемо, дакле, једначине једну испод друге, и подвучемо цртом да укажемо да чине систем. Уместо подвлачења, може се писати и на други наведени начин (чешће се тај други користи при штампању, а кад пишемо, правило је да се систем подвлачи).
Обично се пишу одговарајуће непознате једна испод друге.

Систем од две линеарне једначине са две непознате

Еквивалентност система

Систем од две линеарне једначине са две непознате има облик

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ \underline{a_2x + b_2y = c_2} \end{aligned}$$

a_1, a_2 су коефицијенти уз x

b_1, b_2 су коефицијенти уз y

c_1, c_2 су слободни чланови ($a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$)

Решење овако дефинисаног система је уређени пар (x_0, y_0) чијом заменом у једначинама система (x са x_0, а y са y_0) обе једначине система постају истините бројевне једнакости.

Ово је наравно „прости“ облик система. У задацима ће једначине система имати „компликованији“ облик (као и кад смо решавали линеарне једначине). Применом истих правила еквивалентности као и код једначина (замена израза са идентички једнаким њему, додавање истог израза на обе стране, множење обе стране једначине истим бројем различитим од нуле) добијаћемо међусобно еквивалентне системе и довести их у овај „прости“облик, а затим решавати.

Два система су **еквивалентна**, ако је решење једног истовремено и решење другог система, и обрнуто.

Постоји неколико метода за решавање система, и у наредним часовима ћемо их научити.

Што се броја решења тиче, систем од две линеарне једначине са две непознате може имати:

1) јединствено решење (уређени пар (x_0, y_0)) и тада је систем одређен
2) бесконачно решења и тада је систем неодређен
3) нема решења и тада је систем немогућ

Пошто смо већ видели да решење система можемо добити као пресек правих, то је и логично, јер две праве могу да се секу у једној тачки (систем тад има јединствено решење), да се поклапају(систем има бесконачно решења) или да су паралелне(систем нема решења).

У примеру на следећој страни је илустрација тих случајева.

Систем од две линеарне једначине са две непознате

Еквивалентност система

Пример 1: Нацртај у истом координатном систему графике функција датих једначинам система, а затим одреди пресечну тачку која је решење тог система.

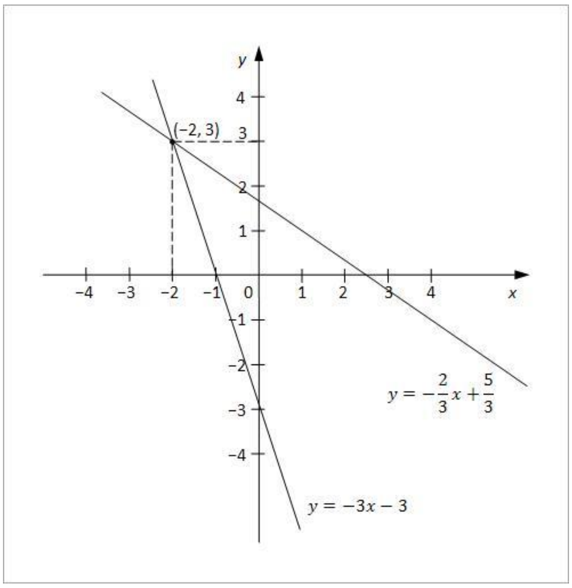
а) $2x + 3y = 5$

$3x + y = -3$

Најпре изразимо y тј. пребацимо функције у експлицитни облик.

$3y = -2x + 5 \;/:3$ $\qquad y = -3x - 3$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$



Закључујемо да систем има јединствено решење и да је то уређени пар $(-2,3)$

Провера:

$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 5$

$-4 + 9 = 5$

$5 = 5$, т

Проверимо и за другу једначину система:

$3 \cdot (-2) + 3 = -3$

$-6 + 3 = -3$

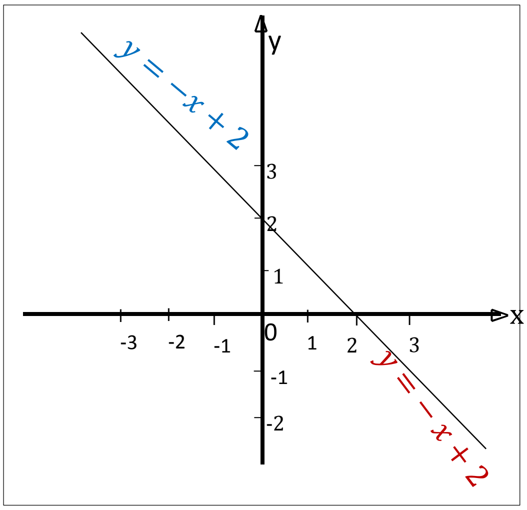
$-3 = -3$, т

Значи, уређени пар $(-2,3)$ јесте решење овог система.

б) $x + y = 2 \quad \Rightarrow y = -x + 2$

$3x + 3y = 6 \quad \Rightarrow 3y = -3x + 6 \;/: (-3) \quad \Rightarrow y = -x + 2$

Видимо да се, у овом случају, ради о једнаким линеарним функцијама, што значи да се графици поклапају. То значи да ће у овом случају систем имати бесконачно решења(све тачке праве), односно, решење је сваки уређени пар $(x, -x + 2)$ $x \in \mathbb{R}$

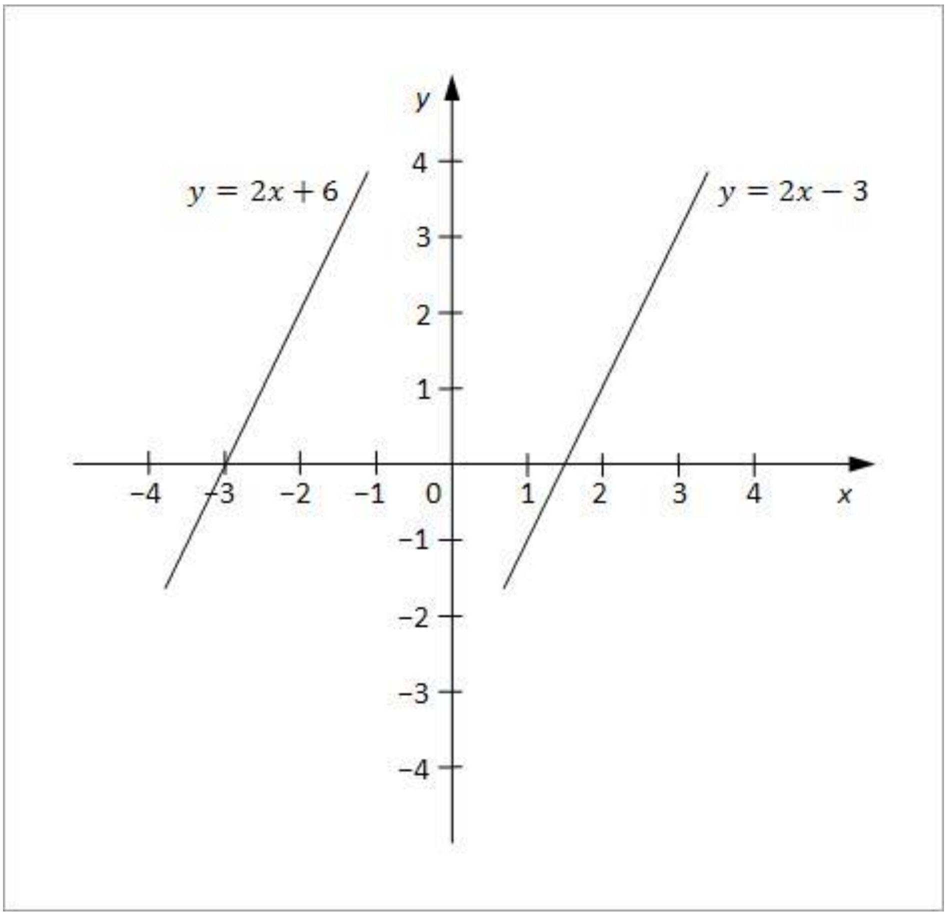


Систем од две линеарне једначине са две непознате

Еквивалентност система

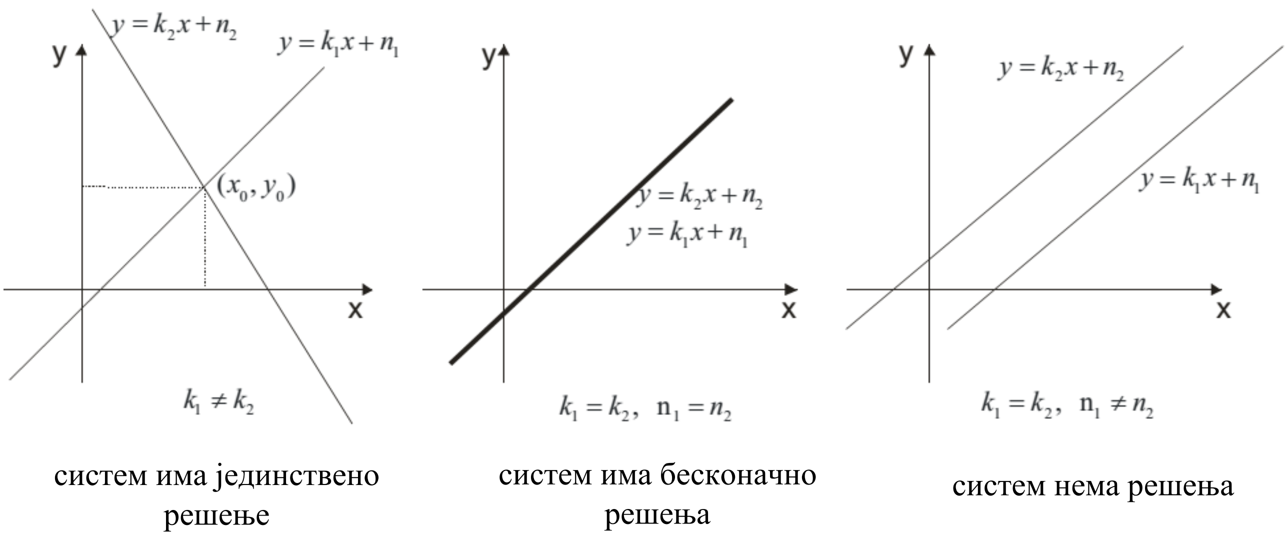
в) $2x - y = 3 \quad \Rightarrow y = 2x - 3$

$\underline{-2x + y = 6} \quad \Rightarrow y = 2x + 6$



Праве су у овом случају паралелне, па систем нема решења, тј. $(x, y) \in \emptyset$

Ево и на следећој слици сва три случаја уопштено.



Систем од две линеарне једначине са две непознате

Еквивалентност система

Пример2:

Провери да ли је уређени пар $(3, \frac{1}{3})$ решење система $\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ \underline{3x - 6y = 7} \end{array}$

$2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 7 \Rightarrow 6 + 1 = 7$ што је истинита бројевна једнакост

$3 \cdot 3 - 6 \cdot \frac{1}{3} = 7 \Rightarrow 9 - 2 = 7$ што је такође истинита бројевна једнакост

Дакле, уређени пар $(3, \frac{1}{3})$ јесте решење система $\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ \underline{3x - 6y = 7} \end{array}$

Пример3:

Провери да ли је уређени пар $(1, -1)$ решење система $\begin{array}{l} x + y = 2 \\ \underline{2x + y = 3} \end{array}$

$1 + (-1) = 2$ што није истинита бројевна једнакост

$2 \cdot 1 + (-1) = 3$ такође није истинита бројевна једнакост, што значи да уређени пар $(1, -1)$ није решење система $\begin{array}{l} x + y = 2 \\ \underline{2x + y = 3} \end{array}$

Пример4:

Дати систем замени еквивалентним најједноставнијег облика:

$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3 \;/\cdot 30$ (све као што смо радили са једном линеарном једначином)

$\underline{\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3 \;/\cdot 12}$

$5(5x-1) + 3(3y-1) = 90$

$\underline{2(11-x) + 3(11+y) = 36}$

$25x - 5 + 9y - 3 = 90$

$\underline{22 - 2x + 33 + 3y = 36}$

$25x + 9y = 90 + 5 + 3$

$\underline{-2x + 3y = 36 - 22 - 33}$

$25x + 9y = 98$

$\underline{-2x + 3y = -19}$

Сви ови системи су међусобно екввалентни, а овај последњи је систем најједноставнијег облика. Кад будемо решавали системе, кад их доведемо на овај најједноставнији, тада их решавамо.

Систем од две линеарне једначине са две непознате

Еквивалентност система

Задаци за самостални рад:

1. Који од уређених парова $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $(-2, 3)$ и $\left(\frac{7}{6}, -\frac{11}{5}\right)$ је решење система једначина:

а) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - 2x = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x - 4y = 4 \\ -7x + 12y = -1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x - 5y = 18 \\ x + \frac{6}{5} = \frac{1}{6} - y \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{3x-4}{2} + y = \frac{x-1}{2} \\ x = y + \frac{1}{2} \end{cases}$

ђ) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 = -4x - 5y \\ \frac{3x-2}{4} - \frac{2y-1}{5} = -3 \end{cases}$?

2 Дати систем једначина замени еквивалентним тако да обе једначине буду облика $ax + by = c$ $(a, b, c \in Z)$:

а) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = -\frac{5}{6} \\ 0{,}1x + 0{,}2y = 1{,}5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}75x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x-2y+1}{2} = \frac{3x+y-1}{5} \\ 4(x-2) = 4 + 3(y-1). \end{cases}$

75