8.4. Решавање система линеарних једначина методом замене и методом супротних коефицијената. Графичка метода решавања система

Као и у случају линеарних једначина с једном непознатом, тако је и код система линеарних једначина с две непознате свакако најважније питање одређивање скупа решења, односно решавања којим се одређује скуп решења тог система.

Пример 3

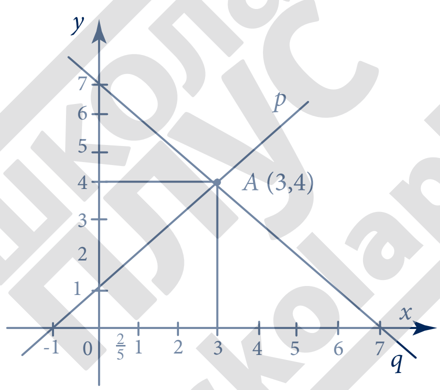
1) Графички прикажи скуп решења једначине $y = x + 1$ и једначине $x + y = 7$.

2) Покажи да је уређен пар (3, 4) заједно њихово решење.

3) Да ли оне имају још неко заједничко решење?

Решење:

1) $y = x + 1$ је линеарна функција чији је график права (p).
График функције $x + y = 7$ је права (q) (сл. 4).



Слика 6

2) Како је $4 = 3 + 1$ и $3 + 4 = 7$ то је уређен пар (3, 4) заједничко решење тих једначина. Његов график је заједничка тачка правих (p) и (q).

3) Две различите праве могу имати само једну заједничку тачку. Дакле, једино заједничко решење једначина $y = x + 1$ и $x + y = 7$ уређен пар (3, 4). Дакле, систем једначина $\begin{aligned} y &= x + 1 \\ x + y &= 7 \end{aligned}$ има скуп решења $S = \{(3, 4)\}$.

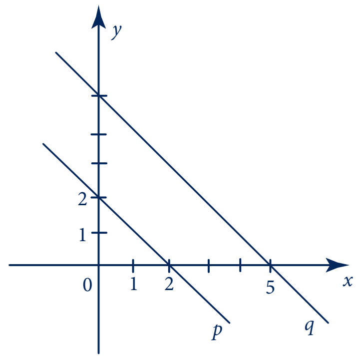
Кажемо да систем једначина $\begin{aligned} x + y &= 7 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$ има јединствено решење. То је уређен пар (3, 4).

Пример

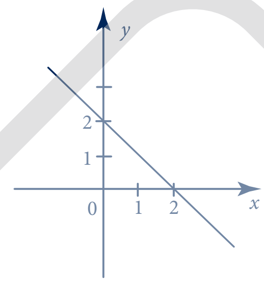
1) Графички реши систем

1) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$; 2) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$.

1) График једначине $x + y = 2$ је права p, а график једначине $x + y = 5$ је права q (сл. 5) паралелна правој p. Како оне немају заједничких тачака то дати систем нема решење.
2) Графици датих једначина су исте праве (покажи сам, сл. 6). (Друга једначина је добијена од прве множењем обеју страна са 2, па је свако њено решење и решење прве једначине, тј. дати систем има бесконачно решења. То су уређени парови облика $(\alpha, 2 - \alpha)$, $\alpha \in R$.



Слика 5



Слика 6

У предходном примеру показали смо како се графички приказује скуп решења линеарне једначине са две промењљиве, а затим одређује заједнички скуп решења две линеарне једначине са две промењљиве. Таква метода зове се **графичка метода** решавања система линеарних једначина.

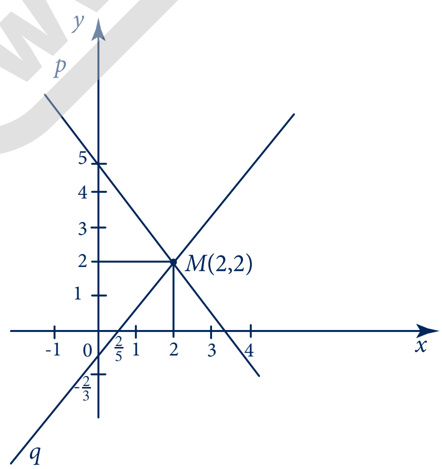
Графичка метода којом се решавају системи једнчина је погодна за разумевање чињенице колико систем може имати решења, будући да је то питање везано за број пресечних тачака које могу имати две праве.
Њен недостатак је у честој немогућности да се прецизно одреде решења система.

Пример 4

Реши графички систем

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 5x - 3y &= 2 \end{aligned}.$$

График функције дефинисане једначином је $2x + y = 6$ је права p, а график функције дефинисане једначином $5x - 3y = 2$ је права q (сл. 7).



Слика 7

Које су координате њихове пресечне тачке M? То је графички тешко одредити. Зато решимо тај систем користећи се еквивалентним трансформацијама. Како смо у претходном поглављу видели како се то детаљно ради, неке кораке ћемо подразумевати, без сувишних детаља.

$$\begin{matrix} 2x+y=5 \\ 5x-3y=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=5-2x \\ 5x-3y=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=5-2x \\ 5x-3(5-2x)=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=5-2x \\ 5x-15+6x=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=5-2x \\ 11x-15=2 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} y=5-2x \\ 11x=17 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=5-2x \\ x=\frac{17}{11} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=\frac{21}{11} \\ x=\frac{17}{11} \end{matrix}.$$

Последњи систем је лак за читање решења. Наиме, координате тачке M су $M\left(\frac{17}{11},\frac{21}{11}\right)$, тј. решење датог система је уређен пар $\left(\frac{17}{11},\frac{21}{11}\right)$.

Кажемо да смо овим низом поступака решавали систем једначина.

Под решавањем система линеарних једначина с две непознате подразумеваћемо низ поступака којим се еквивалентним трансформацијама систем преводи у систем чије се решење непосредно одређује.

Решавали смо систем једначина $\begin{matrix} x+y=2 \\ x+y=5 \end{matrix}$ графички и показали да он нема решења.

Како то изгледа методом еквивалентних трансформација?

$$\begin{matrix} x+y=2 \\ x+y=5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=2-x \\ x+y=5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=2-x \\ x+2-x=5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=2-x \\ 0\cdot x+2=5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=2-x \\ 0\cdot x=3 \end{matrix}$$

Како једначина $0 \cdot x = 3$ нема решења у скупу реалних бројева то ни дати систем нема решење.

Сам покажи да се систем $\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{matrix}$ може превести у систем $\begin{matrix} y=2-x \\ 0\cdot x=0 \end{matrix}$.

Решење друге једначине је ма који реалан број x, а затим добијамо за дато x да је $y = 2 - x$ па

је решење датог система сваки уређен пар $(x, 2 - x)$, $x \in R$.

27. Реши следеће системе једначина графичком методом.

1) $\begin{matrix} x-y=2 \\ -x+2y=1 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} y=3x \\ y=\frac{1}{3}x \end{matrix}$.

28. Користећи еквивалентне трансформације реши систем једначина:

1) $\begin{matrix} x=2 \\ x+y=3 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} y=3 \\ -x+2y=5 \end{matrix}$; 3) $\begin{matrix} x+2y=5 \\ -3x+5y=18 \end{matrix}$.

Метода замене

У неким претходним примерима користили смо методу да се једна једначина реши по једној непознатој, па се то решење замени у другој једначини која онда постаје једначина са једном непознатом. Решавањем те једначине добијамо вредност те непознате.Заменом вредности те непознате у некој од датих једначина , даље одређујемо вредност друге непознате и тако одређујемо решење система једначина.Та метода решавања система једначина назива се метода замене.

Пример 5

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 5x - 2y &= 13 \end{aligned}.$$

Решимо прву једначину по y, тј.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 5x - 2y &= 13 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= 7 - 2x \\ 5x - 2y &= 13 \end{aligned}.$$

Затим у другој једначини уместо y заменимо израз $7 - 2x$: Одговарајући систем је

$$\begin{aligned} y &= 7 - 2x \\ 5x - 2(7 - 2x) &= 13 \end{aligned}.$$

Друга једначина је сада само са једном непознатом (само са x). Даље

$$\begin{aligned} y &= 7 - 2x \\ 5x - 14 + 4x &= 13 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= 7 - 2x \\ 9x - 14 &= 13 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= 7 - 2x \\ 9x &= 27 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= 7 - 2x \\ x &= 3 \end{aligned}.$$

Даље у првој једначини заменимо уместо x број 3.
Добићемо систем

$$\begin{aligned} y &= 7 - 2 \cdot 3 \\ x &= 3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}.$$

Последњи систем еквивалентан датом је систем решеног облика. Његово решење је уређен пар (3, 1). Провера: $2 \cdot 3 + 1 = 7.\quad 7 = 7$
$5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 13,\quad 13 = 13.$

Пример 6

Реши методом замене систем

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 56 \\ 2x - 3y &= 9 \end{aligned}.$$

Решимо другу једначину по x ($2x = 3y + 9$, тј. $x = \dfrac{3y + 9}{2}$).

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 56 \\ 2x - 3y &= 9 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 3x + 4y &= 56 \\ x &= \frac{3y + 9}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 3\left(\frac{3y + 9}{2}\right) + 4y &= 56 \\ x &= \frac{3y + 9}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9y+27}{2} + 4y = 56 \\ x = \dfrac{3y+9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y + 27 + 8y = 112 \\ x = \dfrac{3y+9}{2} \end{cases}$$

(помножили смо обе стране једначине са 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17y + 27 = 112 \\ x = \dfrac{3y+9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y = 85 \\ x = \dfrac{3y+9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \dfrac{3y+9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \dfrac{3\cdot 5+9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 12. \end{cases}$$

Решење је уређен пар (12, 5).

29. Методом замене реши системе једначина:

1) $\begin{matrix} 3x - 2y = 12 \\ 4x + y = 5 \end{matrix};$ 2) $\begin{matrix} 3x + 4y = 22 \\ 8x + 5y = 19 \end{matrix};$ 3) $\begin{matrix} 5x + 6y = -4 \\ x - 2y = 4 \end{matrix};$

4) $\begin{matrix} 0{,}3x + y = 3{,}6 \\ 2x + 3y = 5 \end{matrix};$ 5) $\begin{matrix} \dfrac{2x}{9} + \dfrac{y}{4} = 11 \\ \dfrac{5x}{12} + \dfrac{y}{3} = 19 \end{matrix};$ 6) $\begin{matrix} 3x - \dfrac{y-3}{5} = 6 \\ \dfrac{x-2}{3} + 4y = 12 \end{matrix};$

7) $\begin{matrix} \dfrac{x+7}{4} - \dfrac{y-7}{6} = 0 \\ \dfrac{x+3}{12} - \dfrac{y-10}{9} = -\dfrac{2}{3} \end{matrix};$ 8) $\begin{matrix} x - 2y = 0{,}5 \\ 4x - 8y = 2 \end{matrix};$ 9) $\begin{matrix} 5x + 10y = 20 \\ x + 2y = 5 \end{matrix}.$

Метода супротних коефицијената

1) Посматрајмо систем једначина

$$\begin{matrix} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{matrix}.$$

Уз непознату y су супротни коефицијенти. У првој једначини 1 у другој –1,
Ако саберемо једначине, тј. $x + y + (2x - y) = 12$ добијамо једначину $3x = 12$ одакле је $x = 4$.

Даље заменом у првој једначини добијамо $y = 1$. То записујемо овако:

$$\begin{matrix} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x + y = 5 \\ (x+y) + (2x - y) = 5 + 7 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x + y = 5 \\ x = 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4 + y = 5 \\ x = 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 1 \\ x = 4. \end{matrix}$$

Решење је уређен пар бројева (4,1).

2) Слично у систему једначина

$$\begin{matrix} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 5y = 1 \end{matrix}$$

супротни коефицијенти су уз непознату x. Сабирањем једначина добијамо једначину $2x + 3y - 2x + 5y = 8$ одакле је $y = 1$, а даље заменом у првој y са 1 добијамо $x = 2$ а скуп решења датог система је $\{(2, 1)\}$. Шта ако уз непознате нема супротних коефицијената. Такви су системи

$$\begin{matrix} 2x + 3y = 11 \\ 4x - 5y = -11 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{matrix}.$$

Ако прву једначину првог система помножимо са (–2) добићемо једначину $-4x - 6y = -11$, па је дати систем еквивалентан систему

$$\begin{array}{l} -4x - 6y = -22 \\ 4x - 5y = -11 \end{array}.$$

Сада имамо супротне коефицијенте уз непознату x па даље решавамо систем овако:

$$\begin{array}{l} -4x - 6y = -22 \\ 4x - 5y = -11 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -4x - 6y + 4x - 5y = -22 - 21 \\ 4x - 5y = -11 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -11y = -33 \\ 4x - 5y = -11 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = 3 \\ 4x - 5y = -11 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} y = 3 \\ 4x - 5 \cdot 3 = -11 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = 3 \\ 4x - 15 = -11 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = 3 \\ 4x = -11 + 15 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = 3 \\ 4x = 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = 3 \\ x = 1 \end{array}.$$ Решење је уређен пар (1, 3)

У систему $\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{array}$ прву једначину помножи са 2, а другу са 3, па ћеш добити супротне коефицијенте уз непознату y, тј. $\begin{array}{l} 4x + 6y = 10 \\ 9x - 6y = 3 \end{array}$. Покажи сам да је решење датог система уређен пар (1, 1).

Одговарајућим еквивалентним трансформацијама систем једначина своди се на две једначине које имају супротне коефицијенте уз бар једну од непознатих.Сабирањем тих једначина добијамо једну једначину са једном непознатом коју знамо да решимо.Даље, као код методе замене одређујемо и вредност друге непознате и тако добијамо решење система једначина. Ова метода решавања система једначина се зове **метода супротних коефицијената**.

30. Методом супротних коефицијената реши систем једначина:

1) $\begin{array}{l} x - \frac{1}{3}y = 4 \\ x + \frac{1}{3}y = 6 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} -x + 5y = 3 \\ x + 6y = 8 \end{array}$; 3) $\begin{array}{l} 5x - 4y = 17 \\ 2x + 4y = 18 \end{array}$;

4) $\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}$; 5) $\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x + 5y = 4 \end{array}$; 6) $\begin{array}{l} 5x + 2y = 16 \\ 7x - 3y = 5 \end{array}$.

31. Реши методом супротних коефицијената системе:

1) $\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ -x - 2y = 6 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 8 \end{array}$

и покажи да они немају решења.

32. Методом супротних коефицијената покажи да систем $\begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ -x - 3y = -5 \end{array}$ има бесконачно решења.

33. Реши и методом замене и методом супротних коефицијената систем једначина:

1) $\begin{array}{l} x + y = 17 \\ x - y = 13 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ 2x - y = -2 \end{array}$; 3) $\begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 11 \end{array}$; 4) $\begin{array}{l} 5x - 3y = 17 \\ 4x + 3y = 19 \end{array}$; 5) $\begin{array}{l} x = 4 \\ -x + y = 5 \end{array}$; 6) $\begin{array}{l} 2y = 10 \\ 5x - 2y = 5 \end{array}$.

34. Погодном методом реши систем једначина (методом супротних коефицијената или методом замене):

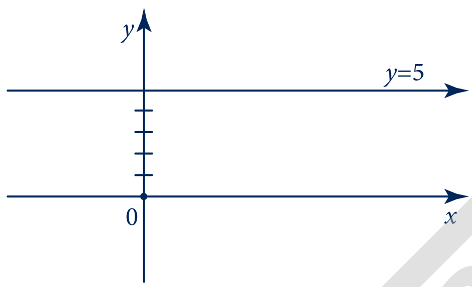
1) $\begin{array}{l} 2x + 5y = 19 \\ 3x - 5y = -9 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} y = x + 2 \\ 5x - 3y = -2 \end{array}$; 3) $\begin{array}{l} x = 2y - 6 \\ 4x + 7y = 36 \end{array}$;

4) $\begin{array}{l} 5x + 6y = 6 \\ 5x + 3y = 3 \end{array}$; 5) $\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 6x - 2y = 1 \end{array}$.

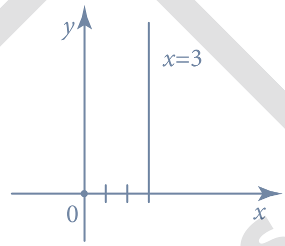
35.* Графичком методом реши системе једначина:

1) $\begin{aligned} y &= 5 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$;   2)* $\begin{aligned} x &= 3 \\ 3x + 2y &= 13 \end{aligned}$.

(График функције $y = 5$ је права паралелна са x-осом (сл. 8).
График једначине $x = 3$ је права паралелна са y-осом.



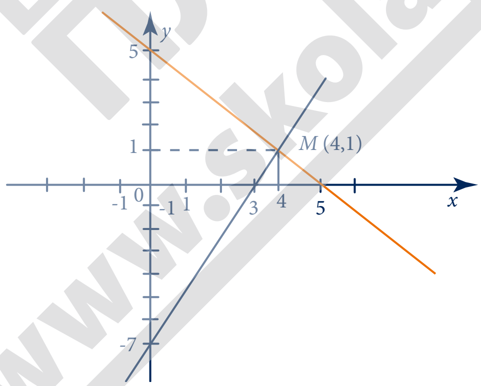
Слика 8



Слика 9

Реши ове системе још неком методом и провери добијене вредности.

36. 1) Уређена двојка (4, 1) је јединствено решење система $x + y = 5$; $2x - y = 7$ (слика 10). Провери.



Слика 10

2) Напиши неке парове бројева који су решења неке од датих једначина.

3) Напиши неке парове бројева који нису решење ни једне од датих једначина.

37. Уређена двојка (–2, 3) је решење једног од следећих система:

1) $\begin{aligned} x - y &= 5 \\ y - 2x &= 6 \end{aligned}$;   2) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= -7 \end{aligned}$.

Нацртај графике једначина и провери.

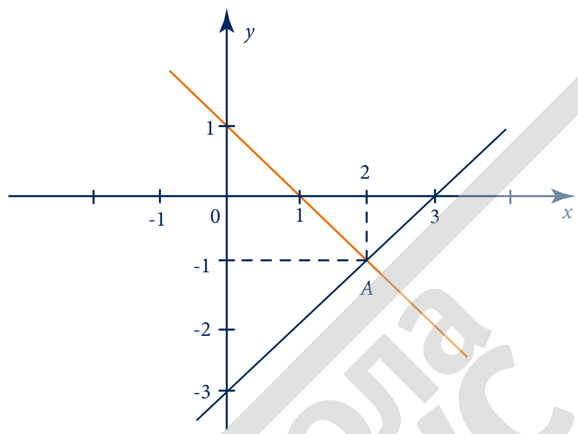
38. Графичком методом провери:

1) Систем $x - y = 0$, $3x + y = 8$ једначина има јединствено решење;

2) Систем $2x + y = 2$, $-2x - y = 3$ нема решења;

3) Систем $x + 2y = -1$, $\frac{x}{2} + y = \frac{1}{2} = 0$ има бесконачно много решења.

39. На слици 11 је представљено решење једног од система:



Сл. 11

1) $\begin{matrix} x + y - 1 = 0 \\ x = y + 3 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \\ -x - y = 1 \end{matrix}$; 3) $\begin{matrix} x = 2 \\ y - x = 0 \end{matrix}$.

Којег?

40. Графичком и другом методом покажи да је решење система једначина:

1) $\begin{matrix} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{matrix}$, уређена двојка $(3, 0)$; 2) $\begin{matrix} x + y = 2 \\ x = 1 \end{matrix}$, уређена двојка $(1, 1)$.

41. Погодном методом покажи да сваки систем има јединствено решење:

1) $\begin{matrix} 2x - y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} 5x + 4y = 13 \\ 3x + 5y = 13 \end{matrix}$; 3) $\begin{matrix} -4x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 18 \end{matrix}$.

42. Један од система нема решења, а други има бесконачно много решења. Провери.

1) $\begin{matrix} x - y = 0{,}2 \\ -5x + 5y = -1 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} 2x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{matrix}$.

43. Нацртај график једначина $4x - 9y = -24$ и $2x - y = 2$ и покажи да је њихово заједничко решење $(3, 4)$.

44. Следећи систем једначина:

1) $\begin{matrix} -x + y = 2 \\ 2x - y = 7{,}5 \end{matrix}$ има јединствено решење; 2) $\begin{matrix} y - x = 1 \\ -2x + 2y = -1 \end{matrix}$ нема решења;

3) $\begin{matrix} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -0{,}5 \\ -2x + 3y = 2 \end{matrix}$ има бесконачно много решења.

Провери.

45. Реши систем једначина:

1) $\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} 3x - 4y = 34 \\ 7x + 6y = 28 \end{array}$; 3) $\begin{array}{l} \frac{y}{4} + \frac{x}{3} = 7 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = -1 \end{array}$;

4) $\begin{array}{l} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 9 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 2 \end{array}$; 5) $\begin{array}{l} \frac{x}{6} - \frac{y}{8} = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \end{array}$; 6) $\begin{array}{l} \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 2 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 9 \end{array}$.

46. Реши систем једначина:

1) $\begin{array}{l} 2x + 3 = y \\ (x - 2):(y - 1) = 2:1 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} \frac{2x + y}{2} - \frac{x + 3y}{3} = \frac{4}{3} \\ \frac{x - y + 1}{3} - \frac{2x + 3y}{2} = 3 \end{array}$;

3) $\begin{array}{l} (5x - 1):(5y - 1) = (3x + 7):(3y + 6) \\ (4x + 1):(2y + 4) = (10x - 2):(5y + 1) \end{array}$; 4) $\begin{array}{l} \frac{3(2x + y)}{2} - (5y - x) = 2y + 1 \\ \frac{x + 3y}{3} - 5 + y = 0 \end{array}$;

5) $\begin{array}{l} \frac{x + 2y}{4} - \left(x - \frac{1}{3}y\right) = 1 + y \\ \frac{y + 3}{6} + \frac{1 - 0,5x}{4} = \frac{3}{2} \end{array}$; 6) $\begin{array}{l} (x - 1)^2 - x^2 + 1 + y = 2 \\ y^2 - 1 - (y + 1)^2 + x = -2 \end{array}$.

47. Израчунај број n из једначине $4n + \frac{4}{5} = x$ ако је x решење једначине $(x + 1)^2 - 5x = (x + 3)(x - 1)$.

48. Израчунај a ако је $\frac{3a}{2} - 5y = y + 1$ и $(y - 3)^2 - (y + 4) = y^2 - 10y$.

49. За које ће вредности непознате x и y израз $(x - 1)^2$ бити једнак изразу $x^2 + 6 - 3x + y$ ако је x два пута веће од y?

50. За које вредности непознатих a и b ће изрази $a + 3b - 2$ и $2a + b - 3$ бити једнаки, ако се зна да је $b = a - 5$.