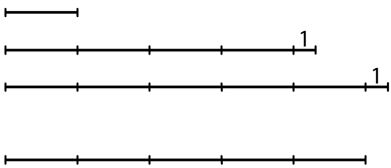
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - IV РАЗЕД

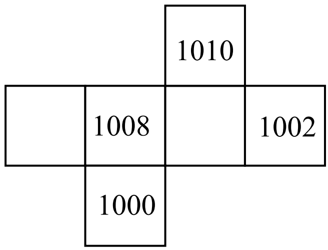
1. Мањи број: : x,
Већи број: : $4x + 1$, (**4 бода**)
Њихов збир: : $5x + 1$,
Збир умањен
за остатак: : $5x = 55$,



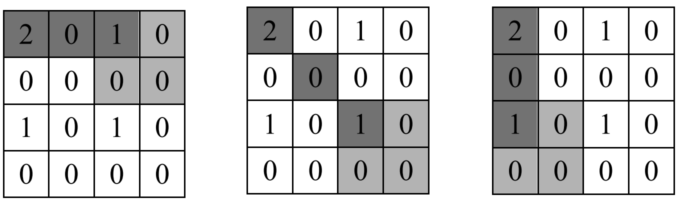
$55 : 5 = 11$; $11 \cdot 4 = 44$; $44 + 1 = 45$; : $x = 11$.
Дакле, први број је 45 (**8 бодова**), а други 11 (**8 бодова**).

2. Посматрамо редом цифре јединица. Ако је цифра јединица једнака 0 или 1, тражени двоцифрени бројеви не постоје. Ако је цифра јединица једнака 2, постоји један двоцифрен број (12). Ако је цифра јединица једнака 3, постоје два броја (13, 23). ... Ако је цифра јединица једнака 9, постоје осам бројева (19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89). Према томе, тражених бројева има $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ (**20 бодова**).
(За делимично урађен задатак (наведена већина тражених бројева, али са грешком у набрајању или сабирању) дати 10 бодова.)

3. Бројеви 1008 и 1010 су фиксирани као на слици (**10 бодова**). На преостала два места можемо уписати бројеве 1004 и 1006 (**10 бодова**).



4. Број 2010 се може прочитати на 9 начина и то показано на пример овако (**20 бодова**):



5. Обим осенченог правоугаоника је једнак разлици збира датих обима 4 означена правоугаоника и обима почетног квадрата то јест $O = (8+18+10+24) - 4 \cdot 10 = 20$, $O = 20\text{cm}$ (**20 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - V РАЗЕД

1. Дати **20 бодова** без обзира у ком облику су разломци записани.

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

2. Угао суплементан углу α је $180^o - \alpha$ (**5 бодова**). Једначина која се добија је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}=180^o-\alpha$ (**5 бодова**). Сређивањем добијамо $\frac{7\alpha}{8}+\alpha=180^o$, односно $\alpha=96^o$ (**10 бодова**).

3. Број је дељив са 9 ако и само ако је његов збир цифара дељив са 9. Највећи шестоцифрени број који је дељив са 9 тражимо у облику $\overline{98765a}$, одакле следи да је $a=1$, јер је $9+8+7+6+5+1=36$. (**8 бодова**) Најмањи шестоцифрени број који је дељив са 9 тражимо у облику $\overline{10234x}$, где је x нека од цифара 5, 6, 7, 8 или 9. Решење је $x=8$ (**12 бодова**).

4. Обим осенченог правоугаоника је једнак разлици збира датих обима 4 означена правоугаоника и обима почетног квадрата то јест O = (8,6 + 22,2 + 6,4 + 18,6) – 4 · 10 =15,8; O = 15,8cm (**20 бодова**).

5. Како је $10=2\cdot5\cdot1\cdot1$, то су цифре тражених бројева управо 1, 1, 2 и 5 (**10 бодова**). Бројеви који су мањи од 2009 могу почињати само цифром 1 и то су 1125, 1152, 1215, 1251, 1512, 1521 (**10 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗЕД

1. Сређивањем добијамо $\frac{-2}{-3}+\frac{-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{5}{6}$ (**20 бодова**).

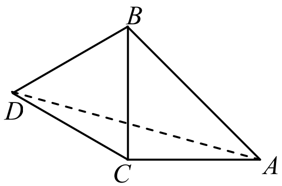
2. Углови од 45° и 75° се могу конструисати: 45° се добија конструкцијом симетрале правог угла, док се 75° степени добија конструкцијом симетрале угла од 30° и одузимањем од правог угла. Нека је D подножје нормале из темена C. Правоугли троуглови ACD и BCD се могу конструисати, пошто имају познату хипотенузу и још један угао. За коректну конструкцију дати **20 бодова**.

3. Како 18 дели $\overline{991a}+\overline{b234}$, цифра a мора бити парна (**5 бодова**). Број n је дељив са 9 ако и само ако је сума цифара броја n дељива са 9. Следи да 9 дели суму цифара

$$9+9+1+a+b+2+3+4=28+a+b$$ (**10 бодова**).

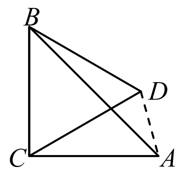
Сада добијамо да је $a+b=8$ или $a+b=17$. Решења су следећи парови бројева (0, 8), (2, 6), (4, 4), (6, 2) и (8, 9). (**5 бодова**)

4. Троугао ACD је једнакокрак, због $AC = CB = CD$ (**5 бодова**).Темена A и D могу бити са исте или различитих страна праве BC.

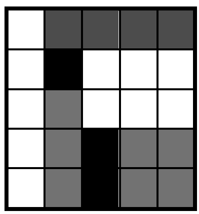


1) Темена A и D су са различитих страна праве BC. Угао ACD је једнак $90^o+60^o=150^o$, па је $\angle CAD=\angle CDA=15^o$ (**3 бода**). Зато је $\angle ADB=60^o-15^o=45^o$ (**5 бодова**).

2) Темена A и D су са исте стране праве BC. Угао ACD је једнак $90^o-60^o=30^o$, па је $\angle CAD=\angle CDA=75^o$ (**3 бода**). Зато је $\angle ADB=60^o+75^o=135^o$ (**4 бода**).



5. Правоугаоници чија је једна страница једнака 1, имају димензије 1×1, 1×2, 1×3, 1×4 и 1×5. Правоугаоници чија је мања страница једнака 2 имају димензије 2×2 и 2×3 (**5 бодова**). Тих седам правоугаоника са површинама 1, 2, 3, 4, 5, 4 и 6 имају укупну површину 25 (**5 бодова**). Један могући распоред тих правоугаоника је на слици (**10 бодова**):



(Дати 20 бодова и ако је неко нацртао добар распоред правоугаоника (и без претходног образложења)).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗЕД

1. Користећи квадрат бинома добијамо:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = x^2+2+\frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}+2 = \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

Зато је $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ (**7 бодова**). Слично, из $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2$ следи $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$ (**8 бодова**). Сабирањем последње две једнакости је $2x=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=\frac{18}{3}=6$, па је $x=3$. (**5 бодова**)

2. Нека је растојање суседних типки једнако $x=12mm$. Из Питагорине теореме растојање између бројева 0 и 1 је једнако $\sqrt{x^2+(3x)^2}$ = $x\sqrt{10}$. Растојање између типки 1 и 1 је једнако 0, док је растојање имеђу типки 1 и 3 је једнако $2x$ (**5 бодова**). Користећи симетрију добијамо да је најкраћа црта која је „повучена прстом“ дужине $x\sqrt{10}+0+2x+x\sqrt{10}+x\sqrt{10}+x+x\sqrt{2}+x\sqrt{5}+x\sqrt{5}$,
односно $3x\sqrt{10}+2x\sqrt{5}+x\sqrt{2}+3x$ (**7 бодова**). Сада процењујемо $12\cdot(3\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+3)>12\cdot(3\cdot 3+2\cdot 2,2+1,4+3)=12\cdot 17,8=213,6$ (**8 бодова**), па је најкраћа црта већа од $210mm$.

3. Због симетрије осенчени део је ромб, који има висину 5 cm (**10 бодова**). Нека је страница паралелограма једнака a. Из Питагорине теореме добијамо $(12-a)^2+5^2=a^2$, односно $a=\frac{169}{24}$ (**5 бодова**). Сада је површина осенченог дела управо једнака $a\cdot h=\frac{169}{24}\cdot 5, P=\frac{845}{24}\text{cm}^2$ (**5 бодова**).

4. Укупан број дијагонала n-тоугла једнак је $\frac{n(n-3)}{2}$. Из услова задатака добијамо једнакост $\frac{n(n-3)}{2}=n+2010$ (**5 бодова**). Сређивањем се добија $n(n-5)=4020=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ (**5 бодова**). Бројеви n и $n-5$ дају исти остатак при дељењу са 5, па је производ $n(n-5)$ дељив са 25 или није дељив са 5. Производ $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ је дељив

само са 5, па једначина $n(n-5)=4020$ нема целобројно решење, односно такав многоугао не постоји (**10 бодова**).
Други начин решавања се састоји у испробавању свих могућности.

5. Последња цифара броја 44^n је 4 или 6, зависно од того да ли је n непарно или парно. Према томе последња цифра броја 44^{43} је 4, а последња цифра броја 44^{44} је 6 (**10 бодова**). Како је

$$\frac{44^{44}}{2}=44^{43}\cdot\frac{44}{2}=44^{43}\cdot 22$$

и последња цифра броја 44^{43} је 4, па је последња цифра броја $\frac{44^{44}}{2}$ цифра 8 (**10 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД

1. Нека су x и y природни бројеви такви да је $xy = 2(x+y)$. Пребацивањем сабирака на леву страну и додавањем 4 добијамо $xy - 2x - 2y + 4 = 4$, односно $(x-2)(y-2) = 4$ (**10 бодова**). Како је 4 = 4·1 = 2·2 онда је једно решење $x - 2 = 4$ и $y - 2 = 1$, $x = 6$ и $y = 3$, а друго решење је $x - 2 = 2$ и $y - 2 = 2$, $x = 4$ и $y = 4$ (**10 бодова**). Задатак има два решења, а тражени бројеви су 6 и 3 или 4 и 4.

2. Нека је страница мањих квадрата *x,* тада је страница већег квадрата 2*x*. Због симетрије и Питагорине теореме добијамо $(4x)^2 + (2x)^2 = 2^2$, односно $20x^2 = 4$, па је $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (**10 бодова**). Површина круга је $1^2\pi$, док је површина квадрата једнака $8 \cdot x^2 + (2x)^2 = 12x^2 = \frac{12}{5}$. Површина дела круга који је ван уцртаних 9 квадрата је $\pi - \frac{12}{5}$ (**10 бодова**).

3. Једначина праве која садржи координатни почетак и тачку *A*(32, 76) је $y = \frac{76}{32}x = \frac{19}{8}x$ (**5 бодова**). Целобројне тачке на дужи *AO* имају x координату између 0 и 32. Из горњег услова x мора бити дељиво са 8 (**7 бодова**). Према томе, једине целобројне тачке имају x координате 0, 8, 16 и 32, односно то су тачке (0,0), (8,19), (16,38), (32,76) (**8 бодова**).

4. Нека је *P* средина дужи *MN*. Због симетрије тачка *P* се налази на дијагонали основе *BD*. Угао између равни MND_1 и *ABC* је управо $\angle DPD_1 = 45^o$ (**5 бодова**). Зато је $DP = DD_1 = 10$. Из једнакокрако правоуглог троугла *BMN* добијамо да је $BP = PN = PM = \frac{x}{\sqrt{2}}$, где је $BN = BM = x$ (**5 бодова**). Сада је $BD = 10\sqrt{2} = DP + PB = 10 + \frac{x}{\sqrt{2}}$ и коначно $BN = x = (20 - 10\sqrt{2})cm$ (**10 бодова**).

5. Сећи сваки пут четвороугао на два четвороугла. После пет сечења добијамо шест четвороуглова који имају 24 темена (**10 бодова**). Сечењем правоугаоника на два троугла и после троугла на два троугла, добијамо шест троуглова који имају 18 темена (**10 бодова**).