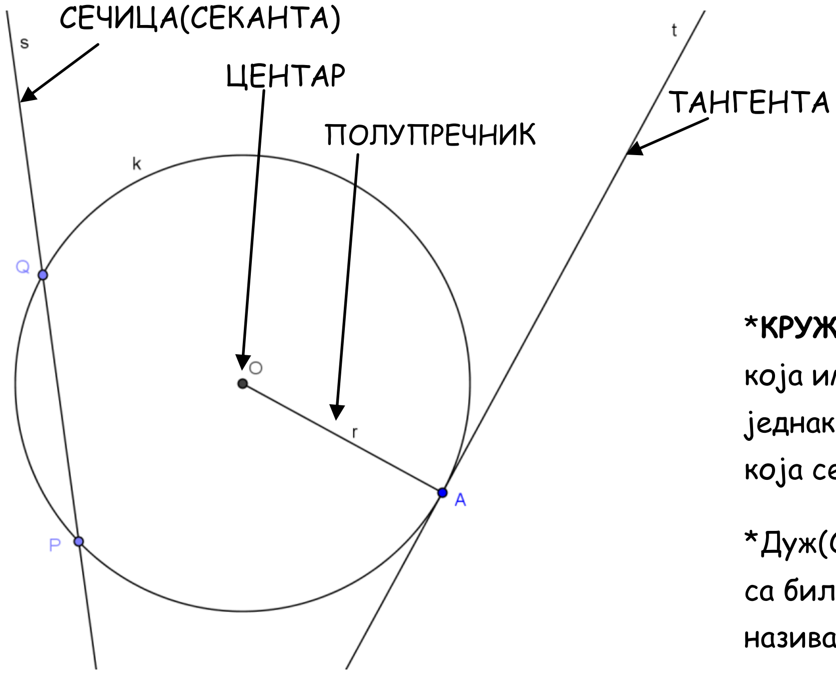
КРУГ



*__КРУЖНИЦА ЈЕ__ затворена крива линија која има особину да су све њене тачке једнако удаљене од једне сталне тачке која се зове **ЦЕНТАР КРУЖНИЦЕ**.

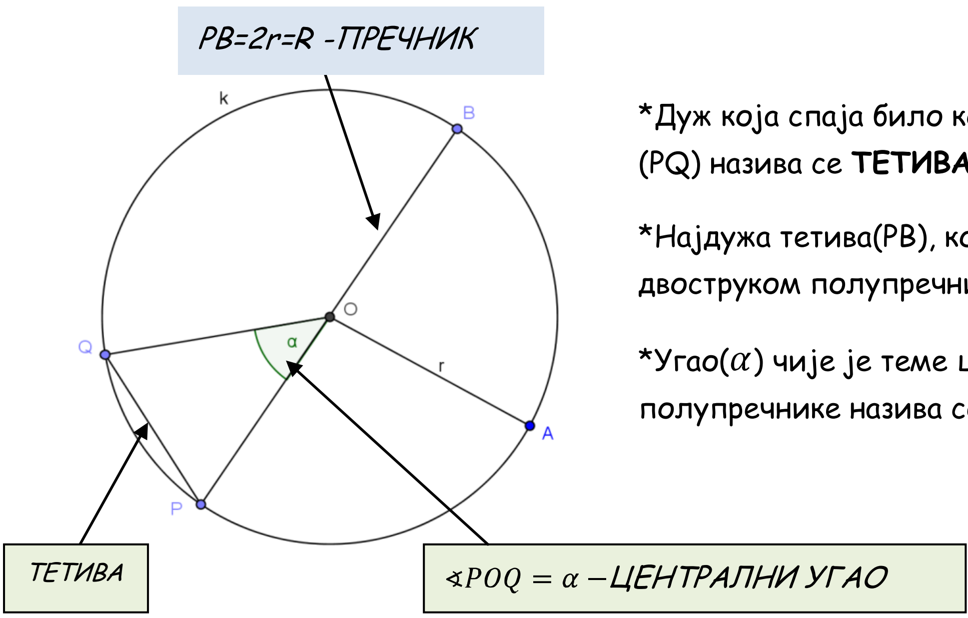
*Дуж(OA=r) која спаја центар кружнице са било којом тачком на кружници назива се **ПОЛУПРЕЧНИК**.

*Кружница дели раван на две области, једну, спољашњу која је неограничена и унутрашњу која је ограничена(кружницом).

*Унија кружнице и унутрашње области назива се **КРУГ**.

*Права(t) која додирује кружницу, са њом има једну заједничку тачку(A) и нормална је на полупречник у тачки додира назива се **ТАНГЕНТА**.

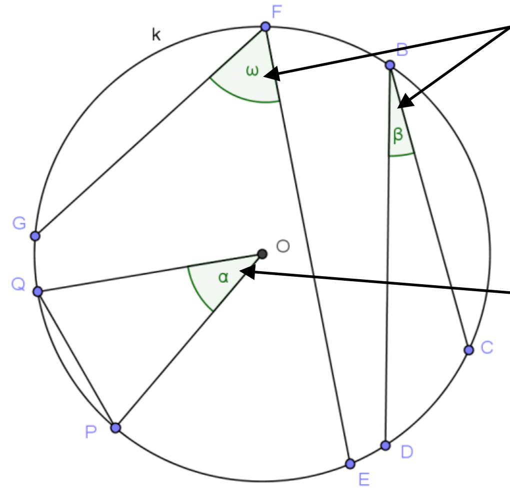
*Права(s) која пресеца кружницу, са њом има две заједничке тачке(P и Q) назива се **СЕЧИЦА(СЕКАНТА)**.



*Дуж која спаја било које две тачке на кружници (PQ) назива се **ТЕТИВА**.

*Најдужа тетива(PB), којој припада центар, једнака двоструком полупречнику, назива се **ПРЕЧНИК**.

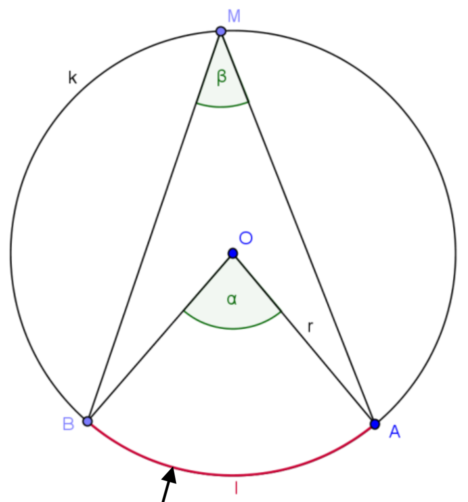
*Угао(α) чије је теме центар круга а краци садрже полупречнике назива се **ЦЕНТРАЛНИ УГАО**.



ПЕРИФЕРИЈСКИ УГЛОВИ

ЦЕНТРАЛНИ УГАО

ПЕРИФЕРИЈСКИ УГАО КРУГА** (β ***или ω) је конвексан угао чије теме припада одговарајућој кружници а краци садрже тетиве круга.



КРУЖНИ ЛУК $\widehat{AB} = l$

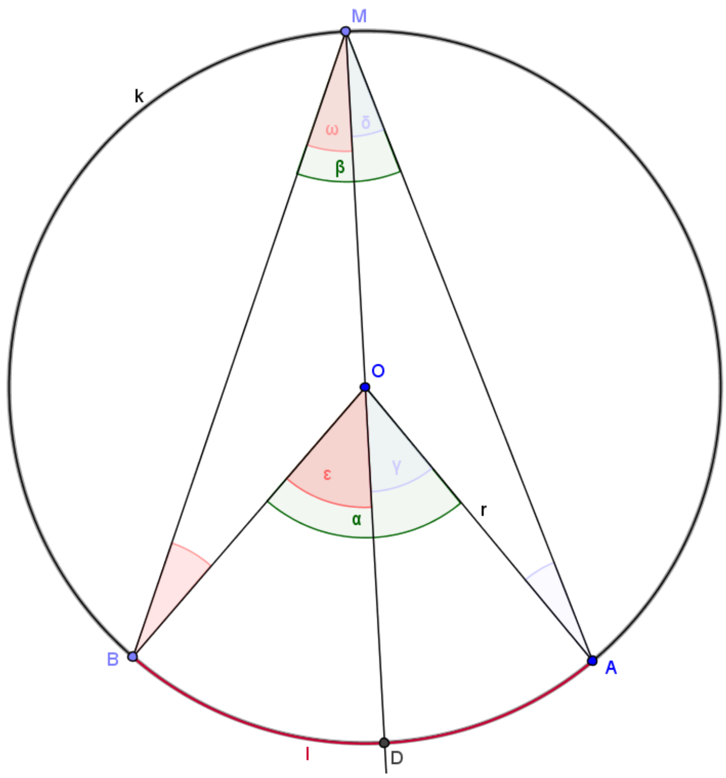
*Део кружнице између две тачке (А и В) које јој припадају назива се **КРУЖНИ ЛУК** ($\widehat{AB} = l$).

*Сваком централном углу одговара неки лук, па кажемо: „Кружни лук $\widehat{AB}$ над централним углом α“ или „Кружни лук $\widehat{AB}$ који одговара централном углу α“.

***ЦЕНТРАЛНИ УГАО ЈЕ ДВА ПУТА ВЕЋИ ОД ОДГОВАРАЈУЋЕГ ПЕРИФЕРИЈСКОГ УГЛА, НАД ИСТИМ КРУЖНИМ ЛУКОМ ТЈ.:**

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = 2 \cdot \beta}}$$

Покажимо то!

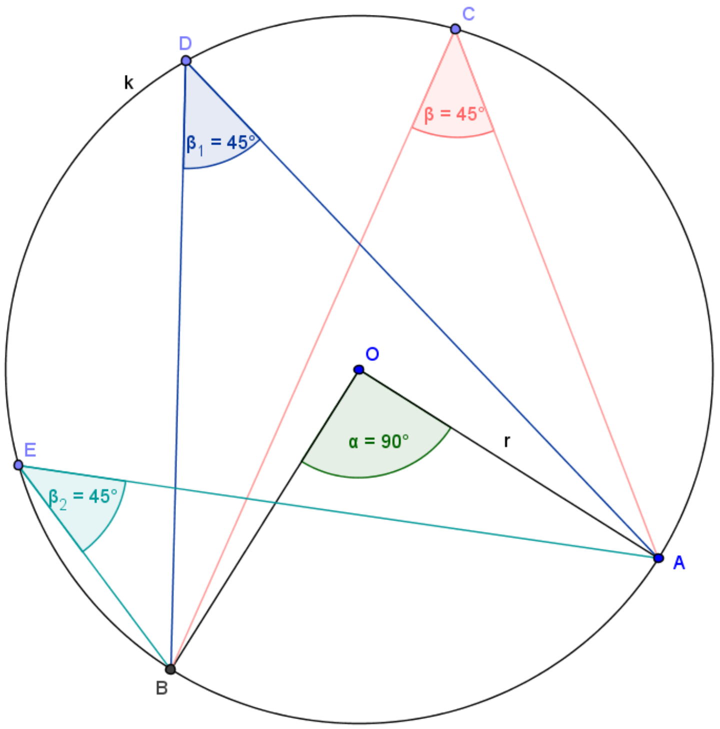


*Угао γ је спољашњи угао за ΔAMO који је једнакокраки.
Дакле $\gamma = 2 \cdot \delta$.

*Такође, и угао ε је спољашњи угао за ΔBMO , а и он је једнакокраки па је и $\varepsilon = 2 \cdot \omega$.

*Како је $\alpha = \gamma + \varepsilon$ и како је $\beta = \delta + \omega$ следи да је :

$$\boldsymbol{\alpha = 2 \cdot \beta}$$



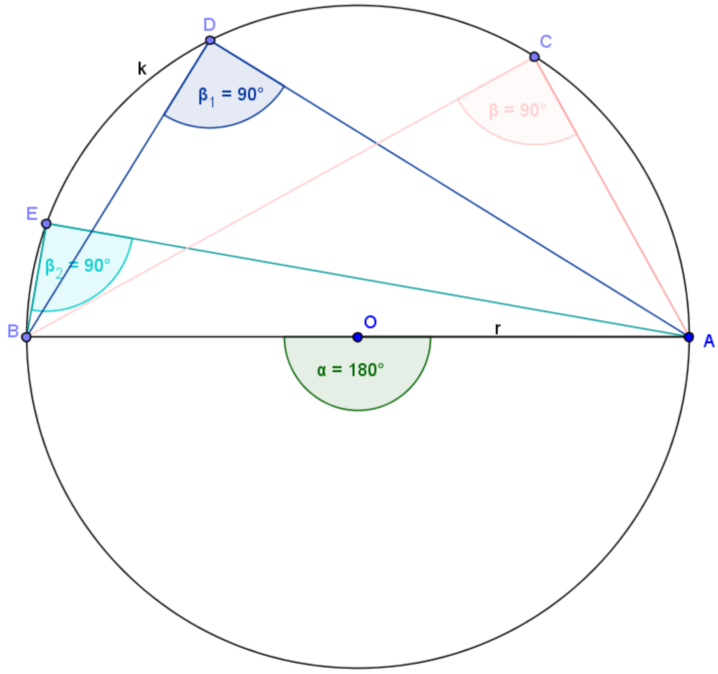
$$\alpha = 2 \cdot \beta$$

$$\alpha = 2 \cdot \beta_1$$

$$\alpha = 2 \cdot \beta_2$$

$$\boldsymbol{\beta = \beta_1 = \beta_2}$$

СВИ ПЕРИФЕРИЈСКИ УГЛОВИ НАД ИСТИМ КРУЖНИМ ЛУКОМ ($\widehat{AB}$) СУ ЈЕДНАКИ !



$$\alpha = 2 \cdot \beta \quad \Rightarrow \beta = 90^0$$

$$\alpha = 2 \cdot \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = 90^0$$

$$\alpha = 2 \cdot \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = 90^0$$

СВИ ПЕРИФЕРИЈСКИ УГЛОВИ НАД ПРЕЧНИКОМ КРУГА СУ ПРАВИ !

ОБИМ КРУГА И ДУЖИНА КРУЖНОГ ЛУКА

***Обим круга представља дужину кружне линије.**

***Постоји директна зависност између обима круга и његовог пречника (полупречника).**

***Ако направимо експеримент тако да меримо дужину обима дна лименке и њен пречник, обим ЦД-а и његов пречник и слично, па израчунамо однос дужина обима и одговарајућег пречника, добићемо константан (сталан) број $\approx 3,14$ тј.: $\frac{O}{R} \approx 3,14$ или $\frac{O}{2 \cdot r} \approx 3,14$.**

***Ову константу обележавамо са „пи“ тј.: $\pi \approx 3,14 \approx \frac{22}{7}$.**

***Из наведеног следи да је обим круга једнак производу његовог пречника и константе π тј:**

$$\boxed{O = R \cdot \pi \quad \text{или} \quad O = 2 \cdot r \cdot \pi}$$

ЕВО НЕКОЛИКО ПРИМЕРА ЗАДАТАКА

Пр. 1. Израчунај обим круга ако је његов пречник $12\ cm$.

R=12 cm $\quad$ $O = R \cdot \pi$

O=? $\quad$ $\boxed{O = 12 \cdot \pi \text{ cm}}$

Пр. 2. Обим круга износи $O = 32 \cdot \pi$ cm . Израчунај његов полупречник.

$O = 32 \cdot \pi$ cm $\quad$ $O = 2 \cdot r \cdot \pi$

r=? $\quad$ $r = \frac{O}{2 \cdot \pi}$

$r = \frac{32 \cdot \pi}{2 \cdot \pi}$ $\quad$ након краћења са 2 и π

$r = 16\ cm$

Пр. 3. Обим круга износи $O = 628$ cm. Израчунај његов полупречник.

$O = 628$ cm $\quad$ $O = 2 \cdot r \cdot \pi$

r=? $\quad$ $r = \frac{O}{2 \cdot \pi}$

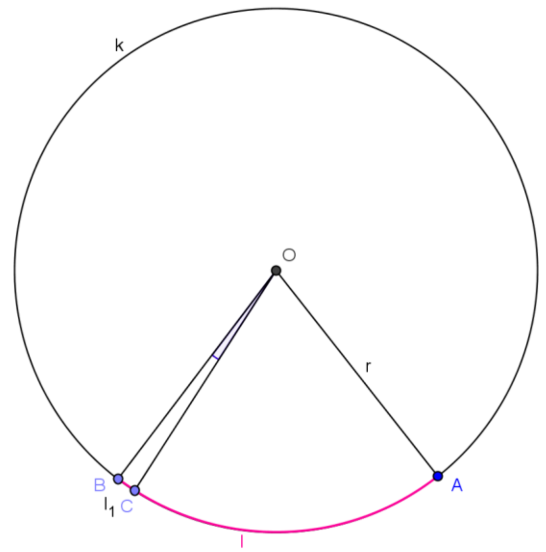
$r = \frac{628}{2 \cdot \pi}$ $\quad$ након краћења са 2

$r = \frac{314}{\pi}$ $\quad$ ово 314 неодољиво подсећа на $\pi \approx 3,14$

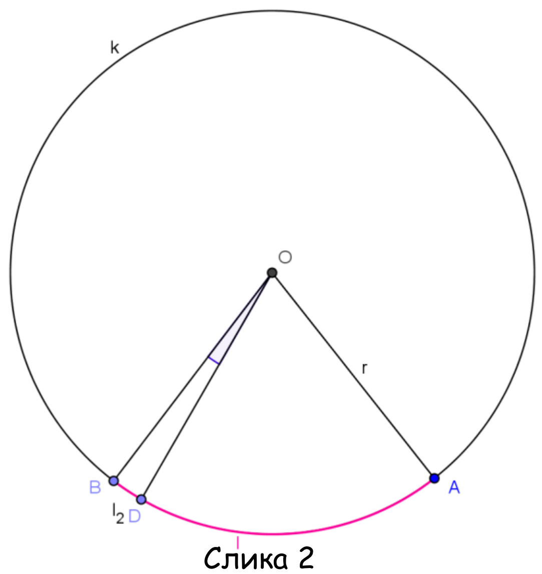
$r = \frac{314}{3,14}$ $\quad$ поделимо ли ово добићемо

$r = 100\ cm$

Нацртајмо сада круг $K(O, r)$ и централни угао $COB = 1°$.



Слика 1



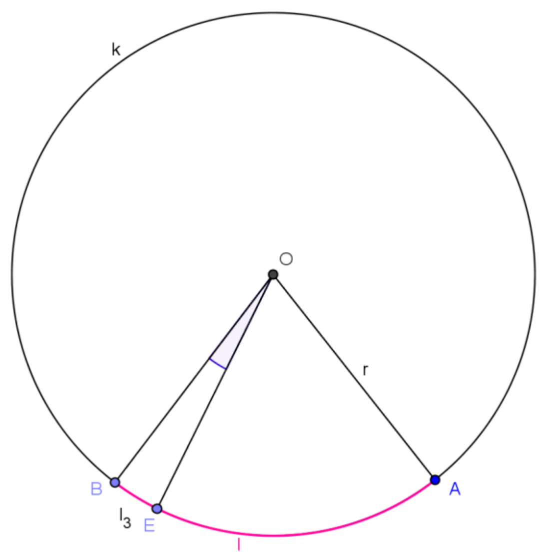
Слика 2

*Део кружнице између две тачке које јој припадају (заједно са тим тачкама) назива се

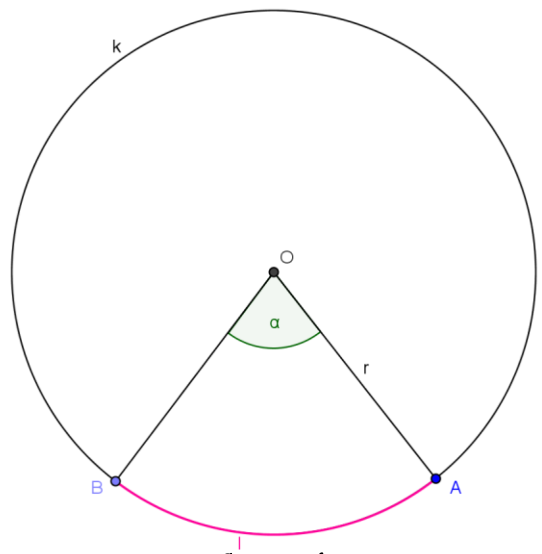
<u>КРУЖНИ ЛУК.</u>

*Како је тај угао, на слици 1, $\frac{1}{360}$ пуног угла и лук l_1 је $\frac{1}{360}$ обима круга тј.: $l_1 = \frac{O}{360}$.

*Како је угао DOB, на слици 2, два пута већи од COB тј.: $\frac{1}{360} \cdot 2$ пуног угла и лук l_2 је $\frac{1}{360} \cdot 2$ обима круга тј.: $l_2 = \frac{O}{360} \cdot 2$.



Слика 3



Слика 4

*И угао EOB, на слици 3, је три пута већи од угла COB те је он $\frac{1}{360} \cdot 3$ пуног угла и лук l_3 је $\frac{1}{360} \cdot 3$ обима круга тј.: $l_3 = \frac{O}{360} \cdot 3$.

*Коначно угао AOB, на слици 4, је $\alpha°$ те је он $\frac{1}{360} \cdot \alpha$ пуног угла и лук l је $\frac{1}{360} \cdot \alpha$ обима круга

тј.: $\boxed{l = \frac{O}{360°} \cdot \alpha}$ или $\boxed{l = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha}$

а након краћења са 2 $\boxed{l = \frac{r \cdot \pi}{180°} \cdot \alpha}$

Пр. 1. Израчунај дужину кружног лука кружнице пречника $6\,cm$ над централним углом $\alpha = 30°$.

$R = 6\,cm \Rightarrow r = 3\,cm$

$\underline{\alpha = 30°}$

$l = ?$

$$\boldsymbol{l = \frac{r \cdot \pi}{180°} \cdot \alpha}$$

$$l = \frac{3 \cdot \pi}{180°} \cdot 30°$$

$$l = \frac{90 \cdot \pi}{180°}$$ након краћења са 90

$$l = \frac{\pi}{2}\,cm$$

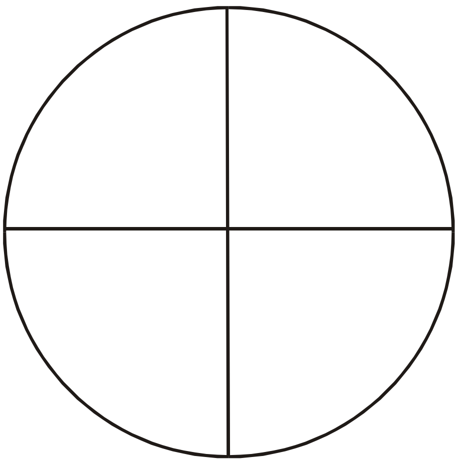
Пр. 2. Попуни табелу

задатак	O	l	α	r
а	cm	cm	$30°$	$5\,cm$
б	cm	$15\,\pi\,cm$	$45°$	cm
в	cm	$40\,\pi\,cm$	$°$	$8\,cm$
г	$12\,\pi\,cm$	cm	$15°$	cm

***Из** $\boldsymbol{l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°} \Rightarrow r = \frac{180° \cdot l}{\pi \cdot \alpha}}$ **или и** $\boldsymbol{\alpha = \frac{180° \cdot l}{\pi \cdot r}}$

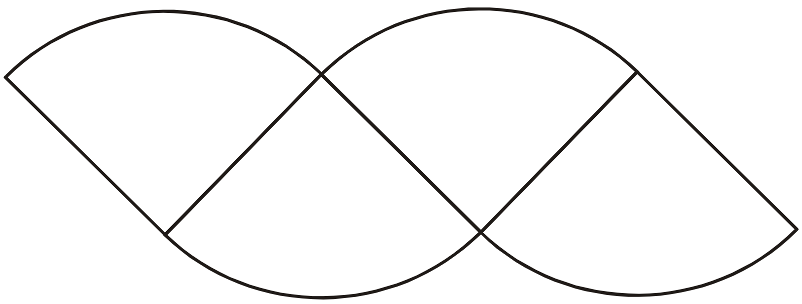
ПОВРШИНА КРУГА

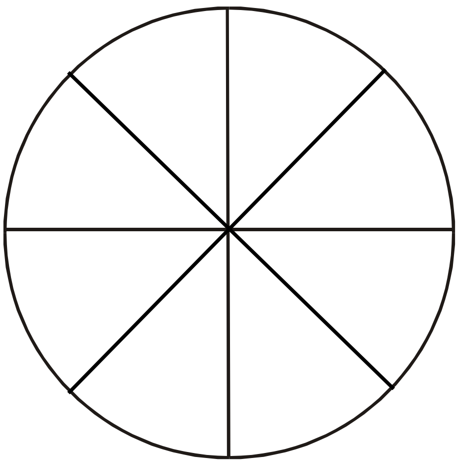
ПРОБАЈМО СЛЕДЕЋИ ЕКСПЕРИМЕНТ



Поделимо круг најпре на четири дела, а затим те делове сложимо један до другог наизменично

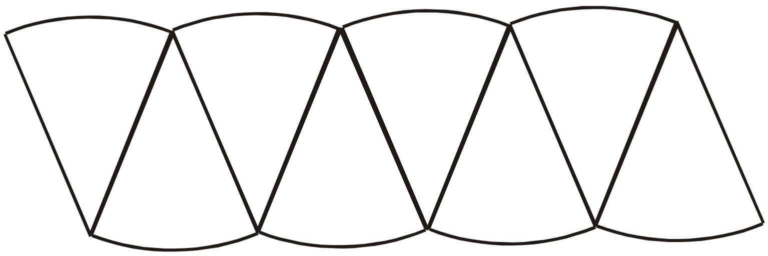
Након трансформације биће

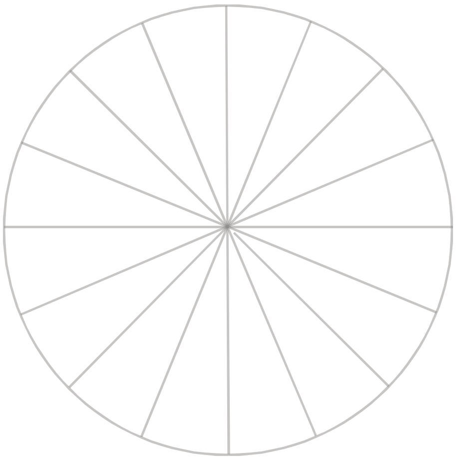




Поделимо затим круг на осам делова, па те делове сложимо један до другог наизменично

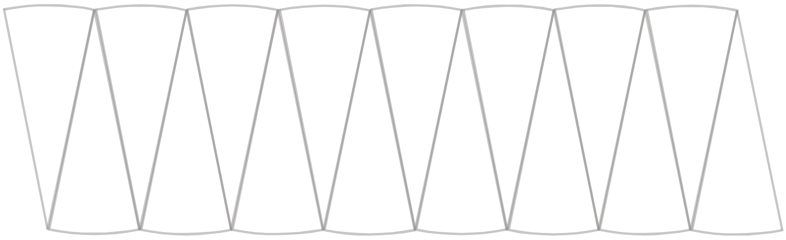
Након трансформације биће



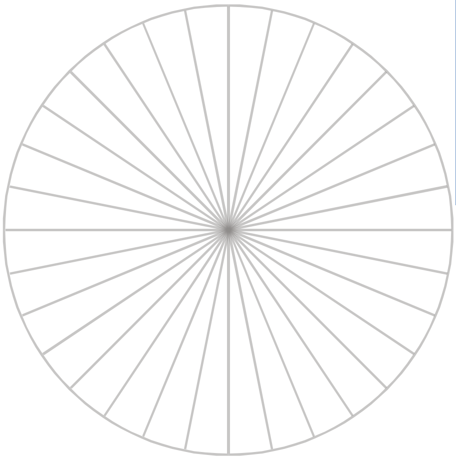


Поделимо опет круг али сада на шеснаест делова, па те делове сложимо један до другог наизменично

Након трансформације добићемо нешто што много подсећа на паралелограм



Ако број делова круга повећавамо до бесконачно, површина круга ће се трансформисати у површину блиску површини правоугаоника. Размисли о димензијама и површини тог правоугаоника?

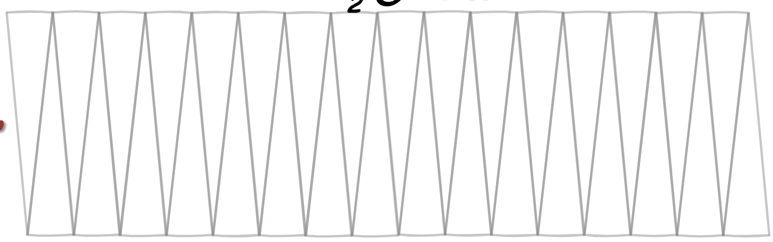


Подсети се
$O = 2r\pi$

Након трансформације биће

$\frac{1}{2}O = r\pi$

r



$$P = r\pi \times r = r^2\pi$$

Дакле: Површина круга једнака је производу квадрата његовог полупречника и константе π тј.:

$$P = r^2 \cdot \pi$$

Пр. 1. Одредити обим и површину круга полупречника $r = 7cm$ (за број π узети приближну вредност 3,14).

$r = 7cm$

$\pi \approx 3,14$

$O = ?$

$P = ?$

$O = 2r\pi$

$O = 2 \cdot 7 \cdot 3,14$

$O = 43,96cm$

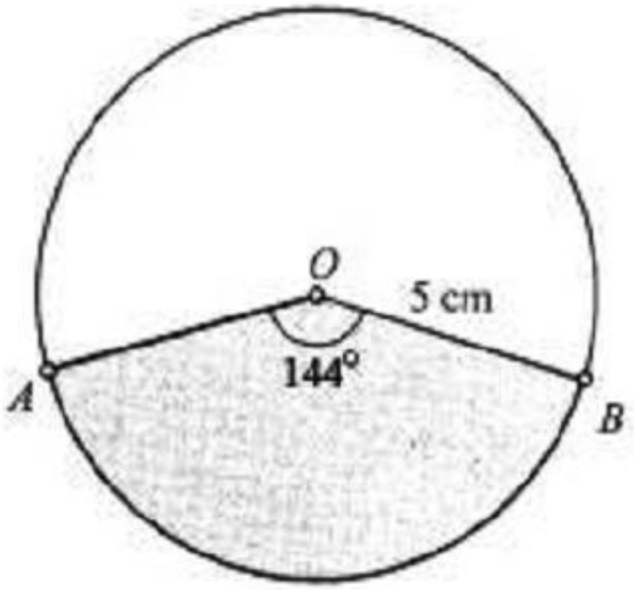
$P = r^2\pi$

$P = 7^2\pi$

$P = 49 \cdot 3,14$

$P = 153,86cm^2$

Пр. 2. **Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити дужину кружног лука *AB* и површину одговарајућег исечка ($\pi \approx 3,14$).**



$r = 5cm$

$\alpha = 144^0$

$\pi \approx 3,14$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}$$

$$l = \frac{5 \cdot 3,14 \cdot 144^0}{180^0}$$

$l = 12,56cm$

$$P = \frac{r \cdot l}{2}$$

$$P = \frac{5 \cdot 12,56}{2}$$

$P = 31,4cm^2$

Пр. 3. Дужина кружног лука *AB* једног круга је π cm, а централни угао над тим луком 15° Одредити обим тог круга.

$l = \pi$

$\alpha = 15^0$

$O = ?$

$$l = \frac{O \cdot \alpha}{360^0}$$

$$\pi = \frac{O \cdot 15^0}{360^0}$$

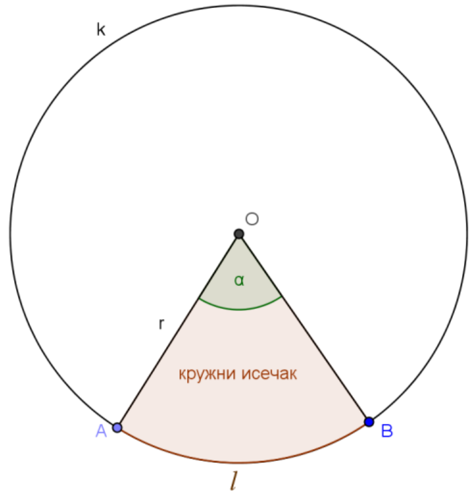
$$\pi = \frac{O}{24}$$

$O = 24\pi cm$

ПОВРШИНА ДЕЛОВА КРУГА

Посматраћемо површине:

*Кружног исечка



* **Кружни исечак** је део круга оивичен са два полупречника и кружним луком над углом који они захватају.

*Ако је површина круга $P = r^2 \cdot \pi$, и ако круг полупречницима поделимо на 360 једнаких делова, онда ће тај један део одговарати кружном исечку чији је централни угао 1^0 а полупречник r.

Дакле, та површина је $P_{ki} = \frac{P}{360°}$ тј.: $P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°}$.

Узмемо ли таква 2 дела њихова површина ће бити

$P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°} \cdot 2$.

Узмемо ли таква 3 дела њихова површина ће бити

$P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°} \cdot 3$.

Узмемо ли α таквих делова њихова површина ће бити $\boldsymbol{P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha}$.

*Дакле површину кружног исечка $\boldsymbol{P_{ki}}$, који одговара централном углу $\boldsymbol{\alpha}$, круга полупречника **r**, рачунамо као

$$\boxed{P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha}$$

*Ако овај образац напишемо мало другачије, тј.: $P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha = \frac{r \cdot \boldsymbol{r \cdot \pi}}{2 \cdot \boldsymbol{180°}} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ и како је дужина кружног лука $l = \frac{\boldsymbol{r \cdot \pi}}{\boldsymbol{180°}} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, произлази да површину кружног исечка можемо рачунати и као

$$\boxed{P_{ki} = \frac{r}{2} \cdot l}$$

Пр. Израчунај површину кружног исечка који одговара централном углу од 30^0 круга полупречника 6 cm.

$r = 6\ cm$

$\underline{\alpha = 30°}$

$P_{ki} = ?$

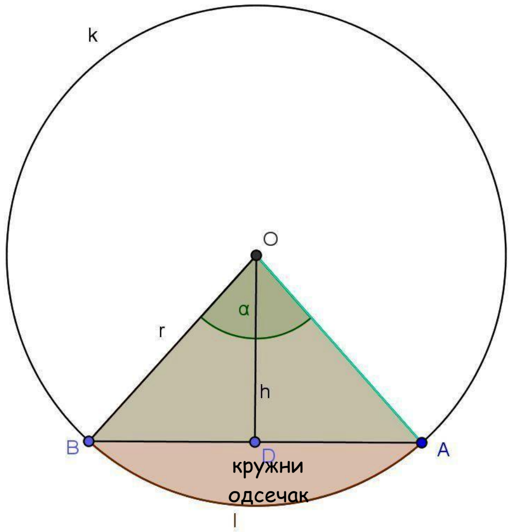
$$\boldsymbol{P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}}$$

$P_{ki} = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot 30°}{360°}$ након краћења са 30

$P_{ki} = \frac{36 \cdot \pi}{12}$ након краћења са 12

$$\boldsymbol{P_{ki} = 3\pi\ cm^2}$$

*Кружног одсечка



* **Кружни одсечак** је део круга оивичен тетивом, и кружним луком који тој тетиви одговара.

*Ако је $P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha$ површина кружног исечка

а $P_{\Delta AOB} = \frac{|AB| \cdot h}{2}$ површина троугла AOB ,

онда је **површина кружног одсечка**

$$\boxed{P_{ko} = P_{ki} - P_{\Delta AOB}}$$

Пр. Израчунај површину кружног одсечка који одговара централном углу од 60^0 круга полупречника 6 cm.

$r = 6\,cm$

$\underline{\alpha = 60°}$

$P_{ko} = ?$

$$P_{ki} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$$

$P_{ki} = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot 60°}{360°}$ након краћења са 60

$P_{ki} = \frac{36 \cdot \pi}{6}$ након краћења са 6

$$P_{ki} = 6\pi\ cm^2$$

Ако је централни угао $\alpha = 60°$, онда је ΔAOB једнакостранични тј.: AB=AO=OB , па је

$P_{\Delta AOB} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$P_{\Delta AOB} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$P_{\Delta AOB} = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{4}$ након краћења са 4

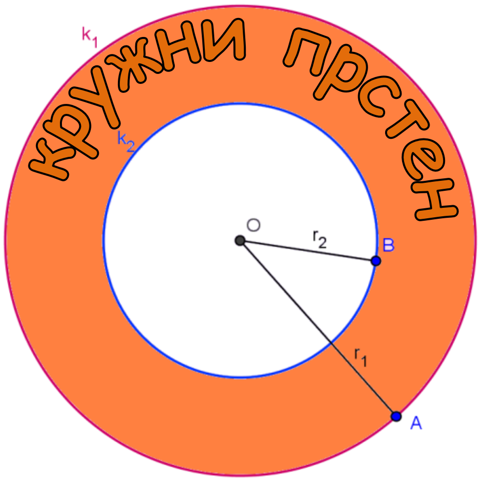
$$P_{\Delta AOB} = 9 \cdot \sqrt{3}\ cm^2$$

$$P_{ko} = P_{ki} - P_{\Delta AOB}$$

$P_{ko} = 6\pi - 9 \cdot \sqrt{3}$ и кад извучемо 3 испред заграде

$$P_{ko} = 3 \cdot \left(2\pi - 3 \cdot \sqrt{3}\right) cm^2$$

*Кружног прстена



* **Кружни прстен** је део равни ограничен са две концентричне кружнице (кружнице са заједничким центром,O, и различитим полупречницима, $r_1 > r_2$) .

*Ако је $P_1 = {r_1}^2 \cdot \pi$ а $P_2 = {r_2}^2 \cdot \pi$,

онда је **површина кружног прстена**

$$\boxed{P_{kp} = P_1 - P_2}$$

$$P_{kp} = {r_1}^2 \cdot \pi - {r_2}^2 \cdot \pi$$

$$\boxed{P_{kp} = \left({r_1}^2 - {r_2}^2\right) \cdot \pi}$$

Пр. Израчунај површину кружног прстена ако је полупречник већег круга 6 cm а површина мањег круга $9\pi\ cm^2$.

$r_1 = 6\ cm$

$P_2 = 9\pi\ cm^2$

$P_{kp} = ?$

$$P_{kp} = P_1 - P_2$$

$$P_1 = {r_1}^2 \cdot \pi$$

$$P_1 = 6^2 \cdot \pi$$

$$P_1 = 36\pi\ cm^2$$

$$P_2 = 9\pi\ cm^2$$

$$P_{kp} = 36\pi - 9\pi$$

$$\boxed{P_{kp} = 27\pi\ cm^2}$$