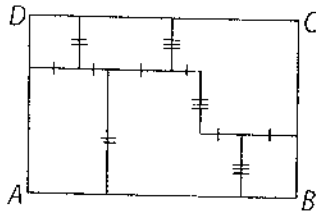


РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - V РАЗЕД

- (ML XLIV-5) 4,9 (20 бодова).
- Како је $2013 = 3 \cdot 671$ и $2010 = 3 \cdot 670$, то се дати број може записати у облику $3 \cdot (2009 \cdot 2011 \cdot 671 + 2008 \cdot 670 \cdot 2012)$, па закључујемо да је он сложен (20 бодова).
- Како α , β и γ имају паралелне краке, они су једнаки или суплементни (5 бодова). Како је $\alpha + \beta = 2011'$ то је $\alpha = \beta = 16^\circ 45' 30''$ (5 бодова). Како је разлика углова γ и β већа од 90° , угао γ је туп и углови γ и β су суплементни (5 бодова) па је $\gamma = 163^\circ 14' 30''$ (5 бодова).
- P , Q , R и S могу имати вредности 2, 3, 5 и 7. Како је збир последњих цифара сабирака једнак P , а $2 + 3 + 5 + 7 = 17$, то је $P = 7$ (5 бодова). Како са места јединица постоји прелаз од једне десетице имамо да је $8 + Q + R = Q$, тј. $8 + R = 10$, одакле је $R = 2$ (5 бодова). Како са места десетица имамо пренос, имамо да је $8 + Q = S$, па закључујемо да је $Q = 5$ (5 бодова) и $S = 3$ (5 бодова).
- Како је збир дужина страница обележених са једном цртом, односно са две, односно са 3 црте једнак редом 14,26cm, 11,3cm, 11,3cm (10 бодова) и како су све дужи обележене цртом странице две новодобијене фигуре, то је збир обима свих 6 фигура:
 $(2 \cdot AB + 2 \cdot BC) + (2 \cdot AB + 4 \cdot BC) = 124,84\text{cm}$ (10 бодова).



Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете Републике Србије ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

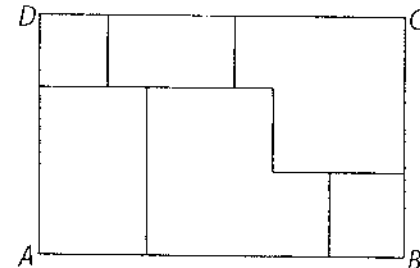
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 09.04.2011.

V РАЗРЕД

- Израчунај вредност израза $7 \cdot 1,2 - \frac{9}{10} : 0,3 - \frac{1}{2}$.
- Испитај да ли је број $2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 2008 \cdot 2010 \cdot 2012$ прост или сложен.
- Углови α , β и γ имају паралелне краке. Збир углова α и β је $2011'$, а разлика углова γ и β је већа од правог угла. Израчунај углове α , β и γ .
- Дешифруј сабирање ако су цифре P , Q , R и S различити прости једноцифрени бројеви.

$$\begin{array}{r} P \\ PQ \\ PQR \\ +PQRS \\ *SQR \end{array}$$

- Одреди збир обима свих 6 фигура (види слику) које су настале поделом правоугаоника $ABCD$ чије су странице дужине $AB = 14,26\text{cm}$ и $BC = 11,3\text{cm}$. Свака од страница свих шест фигура паралелна је једном пару страница правоугаоника $ABCD$.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

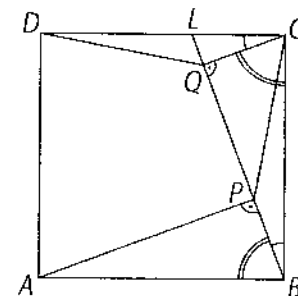
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
09.04.2011.

VI РАЗРЕД

- Изабери четири броја из скупа $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}\right\}$ тако да њихов производ буде: а) највећи; б) најмањи. Израчунај те производе.
- Конструиши троугао ABC ако је $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB = 15^\circ$ и $CC_1 = 3\text{cm}$, где је C_1 средиште странице AB .
- Дат је правоугаоник чије су странице 10cm и 67cm . У унутрашњости правоугаоника на случајан начин је распоређено 2011 тачака. Докажи да при ма ком распореду тачака постоје четири тачке које припадају једном истом квадрату странице 1cm .
- На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L . Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q . Докажи да је $CP = DQ$.
- Нека су a, b, c различите цифре и све различите од нуле. Да ли збир $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$ може бити једнак квадрату неког природног броја (број је квадрат неког природног броја ако је производ тог броја са самим собом)?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗРЕД

- а) Производ је највећи када је позитиван, па треба изабрати четири негативна броја. Њихов производ је $\frac{5}{84}$ (10 бодова).
б) Најмањи производ добијамо када изаберемо бројеве $-\frac{4}{7}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}$ и тада је производ $-\frac{1}{14}$ (10 бодова).
- Како је $CC_1 = 3\text{cm}$, то је $AB = 6\text{cm}$ (5 бодова). Такође имамо да је $\angle ABC = 75^\circ$ па се задатак своди на конструкцију троугла ако су дати страница и два налегла угла (5 бодова). За тачно изведену конструкцију дати 10 бодова.
- Поделимо тај правоугаоник на 670 квадрата површине 1cm^2 . Ако у сваки од тих квадрата распоредимо по 3 тачке, укупно 2010, у ма који квадрат да ставимо последњу тачку он ће садржати 4 тачке. (20 бодова).
- (ML XLIII-5) $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$ јер је $AB = BC$, $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ и $\angle ABP = 90^\circ - \angle QBC = \angle BCQ$ (10 бодова). Сада је $BP = CQ$ и $\angle DCQ = \angle PBC$ па како је $BC = CD$ то је $\triangle PBC \cong \triangle QCD$ (10 бодова). Значи, $DQ = CP$.
- Како је $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222 \cdot (a + b + c)$ (5 бодова) $= 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$ (5 бодова), то ће дати збир бити квадрат неког природног броја ако $a + b + c$ буде најмање једнако са $2 \cdot 3 \cdot 37$ што је немогуће (a, b, c су једноцифрени бројеви) (10 бодова).



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

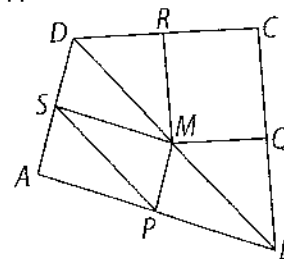
Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

VII РАЗРЕД

1. Ако је $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, колико је $a^{2009} - 2009b$?
2. Хипотенузина висина у правоуглом троуглу дели хипотенузу на делови од 9cm и 16cm. Одреди обим и површину тог троугла.
3. Да ли је број $2009 \cdot 2011 - 48$ сложен? Образложи одговор.
4. Нека су P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA редом конвексног четвороугла $ABCD$ и M тачка унутар тог четвороугла, таква да је $APMS$ паралелограм. Докажи да је четвороугао $MQCR$ паралелограм.
5. Одреди четвороцифрени број чији је збир цифара једнак са производом прве две цифре и једнак са двоцифреним завршетком тог четвороцифреног броја.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗРЕД

1. (ML XLIII-5) Из $a^2 - 2a + 1 + b^2 + 6b + 9 = 0$ добијамо $(a-1)^2 + (b+3)^2 = 0$ (10 бодова).
Одавде је $a = 1$ и $b = -3$ (5 бодова) па је $a^{2009} - 2009b = 6028$ (5 бодова).
2. Ако са a и b означимо катете троугла, а са h хипотенузину висину, тада је $a^2 = h^2 + 16^2$, $b^2 = h^2 + 9^2$ и $a^2 + b^2 = 25^2$. Одатле је $h = 12\text{cm}$, $a = 20\text{cm}$ и $b = 15\text{cm}$ (10 бодова), па је $O = 60\text{cm}$ (5 бодова) и $P = 150\text{cm}^2$ (5 бодова).
3. Овај број је сложен јер је $2009 \cdot 2011 - 48 = (2010 - 1)(2010 + 1) - 48 = 2010^2 - 1 - 48 = 2010^2 - 49 = (2010 - 7)(2010 + 7)$ (20 бодова).
4. Из $\triangle APS \cong \triangle PBM$ и $\triangle APS \cong \triangle SMD$ следи $PS = DM = MB$ и $PS \parallel BM$ и $PS \parallel MD$. Према томе, B, M и D су колинеарне и M дели дијагоналу на два једнака дела (15 бодова). Сада је MR средња линија троугла BCD и $MR \parallel BC$ и $MR = \frac{1}{2}BC = QC$. Према томе $MQCR$ је паралелограм (5 бодова).



5. Тражени четвороцифрени број \overline{abcd} задовољава услове $a + b + c + d = a \cdot b$ и $a + b + c + d = \overline{cd}$. Из другог услова добијамо да је $a + b = 9c$, односно $c = 1$ ($c = 2$ даје $a = b = 9$ што је у супротности са првим условом) (4 бода). Сада имамо да је $10 + d = a \cdot b$ па за $d = 4$ добијамо решење 2714 и 7214 (8 бодова), односно за $d = 8$ добијамо решења 3618 и 6318 (8 бодова).

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

09.04.2011.

VIII РАЗРЕД

1. Израчунај површину фигуре ограничене правом $y = 4$ и графиком функције $y = |x + 1| + |x - 1|$.

2. Одреди вредност израза $a - b$ ако је

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{2011^2}{4021} \quad \text{и} \quad b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{2010^2}{4021}.$$

3. Права која садржи теме A троугла ABC сече страницу BC у тачки M , тако да је $BM : CM = 2012 : 2011$. Тежишна дуж CC_1 сече праву AM у тачки S . Одреди однос дужи CS и SC_1 .

4. Реши једначину у скупу природних бројева:
 $65x^3 + 4y^3 = 2011$.

5. Правилна четворострана пирамида $ABCD$ основне ивице a и висине H пресечена је са равни α . Раван α сече основне ивице AB , AD и бочну ивицу AS редом у тачкама M , N , P тако да је $AM : MB = 1 : 1$, $AN : ND = 2 : 1$, $AP : PS = 3 : 1$.

Израчунај запремину делова пирамиде које одређује раван α .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

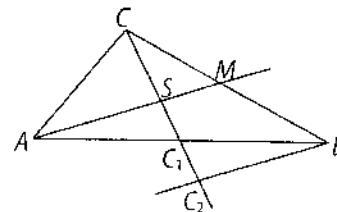
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

1. (ML XLIV-5) График функције ће имати три гране $y = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ (10

бодова) и образује са правом $y = 4$ једнакокраки трапез. Темена трапеза су тачке са координатама $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ и $(-2, 4)$. Основце трапеза су дужине 2 и 4, а висина трапеза дужи-не 2, па је површина трапеза $P = \frac{4+2}{2} \cdot 2 = 6$ (10 бодова).

2. $a - b = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2 - 1^2}{3} + \frac{3^2 - 2^2}{5} + \dots + \frac{2011^2 - 2010^2}{4021}$
 $= \frac{1}{1} + \frac{3 \cdot 1}{3} + \frac{5 \cdot 1}{5} + \dots + \frac{4021 \cdot 1}{4021} = 2011$ (20 бодова).

3. Нацртајмо праву паралелну са AM која садржи тачку B и нека је пресек ове праве са CC_1 тачка C_2 . Тада је $\triangle AC_1S \cong \triangle BC_2C_2$, па је $C_2C_1 = C_1S$. На основу Талесове теореме је $CM : MB = CS : 2SC_1$ (15 бодова) односно, $CS : SC_1 = 2011 : 1006$ (5 бодова).



4. Бројеви x и $65x^3$ су исте парности, па x мора бити непаран број (5 бодова). $x = 1$ није решење јер $2011 - 65$ није дељиво са 4, а $x \geq 5$ није решење јер је тада $65x^3 > 2011$ (5 бодова). За $x = 3$ добијамо да је $y = 4$ решење дате једначине (10 бодова).

5. Ако са H , B и V обележимо, редом, висину, површину основе и запремину почетне пирамиде, а са H_1 , B_1 и V_1 висину, површину основе и запремину пирамиде $AMNP$, тада из $AP : PS = 3 : 1$ добијамо да је $H_1 = \frac{3}{4}H$ (5 бодова) а из $AM : MB = 1 : 1$, $AN : ND = 2 : 1$ добијамо да је

$B_1 = \frac{1}{6}B$ (5 бодова). Следи да је $V_1 = \frac{1}{8}V$ (5 бодова), па је $V_1 : (V - V_1) = 1 : 7$ (5 бодова).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.