СКУПОВИ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Природни бројеви: $N=\{1, 2, 3, \dots\}$

Цели бројеви: $Z=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Рационални бројеви: $Q=\left\{\frac{p}{q} \middle| p \in Z,\ q \in N\right\}$

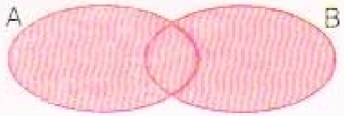
Реални бројеви:

$$R=\{a_0, a_1 a_2 \dots | a_0 \in Z,\ a_k \in \{0,\dots,9\},\ k \in N\}$$

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

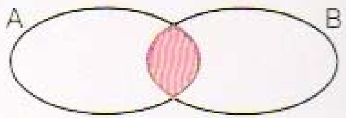
СКУПОВИ

унија скупова



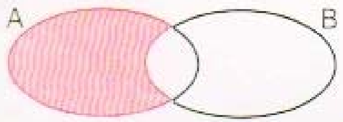
$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

пресек скупова

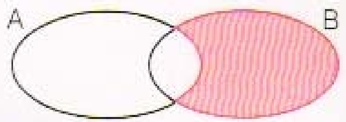


$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

разлика скупова



$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

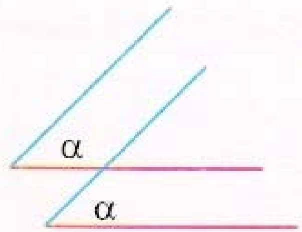


$B \setminus A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$

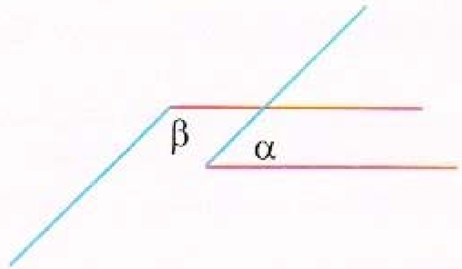
УГЛОВИ

- Два угла су ***комплементна*** ако је њихов збир 90°.
- Два угла су ***суплементна*** ако је њихов збир 180°.
- Угао α је ***суседан*** угао углу β ако се β надовезује на α.
- Суседни углови који су суплементни зову се ***упоредни*** углови.

углови са паралелним крацима

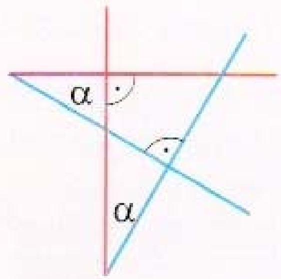


једнаки

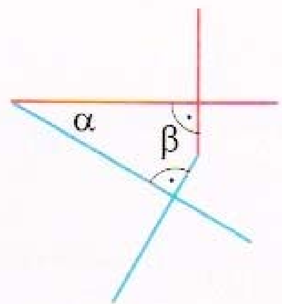


суплементни

углови са нормалним крацима



једнаки



суплементни

ДЕЉИВОСТ

- За сваки природан број n важи $1|n$ и $n|n$.
- Ако су сабирци дељиви неким бројем, онда је и **збир** дељив тим бројем.
- Ако су бројеви m и n, $m \geq n$, дељиви са p, онда је и **разлика** дељива са p.
- Ако је један чинилац производа дељив неким бројем, онда је и сам **производ** дељив тим бројем.
- Број је дељив са **2** ако се завршава цифрама 0, 2, 4, 6, 8.
- Број је дељив са **3** ако му је збир цифара дељив са 3.
- Број је дељив са **4** ако је двоцифрени завршетак броја дељив са 4.
- Број је дељив са **5** ако се завршава цифрама 0 или 5.
- Број је дељив са **9** ако му је збир цифара дељив са 9.
- Број је дељив са **10** ако се завршава цифром 0.

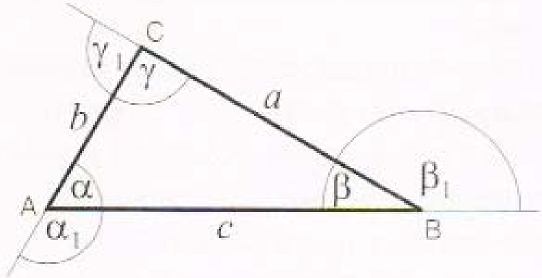
- Природан број m назива се **прост** број ако је $m \neq 1$ и нема делилаца различитих од m и 1.
- Природан број s је **сложен** број ако има бар један делилац различит од s и од 1.

ПРОЦЕНАТ $\left(1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01\right)$

$$G : P = 100 : p \;;\; G = \frac{100 \cdot P}{p} \;;\; p = \frac{100 \cdot P}{G} \;;\; P = \frac{G \cdot p}{100}$$

G – главница, P – процентни износ, p – проценат

ТРОУГАО



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$$

- Спољашњи угао троугла једнак је збиру два њему несуседна унутрашња угла ($\alpha_1 = \beta + \gamma$; $\beta_1 = \alpha + \gamma$; $\gamma_1 = \alpha + \beta$).
- У сваком троуглу једна страница је мања од збира друге две, а већа од њихове разлике ($a - b < c < a + b$).
- У троуглу наспрам веће странице лежи већи угао ($a > b > c \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma$) и обрнуто, наспрам већег угла лежи већа страница ($\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow a > b > c$).

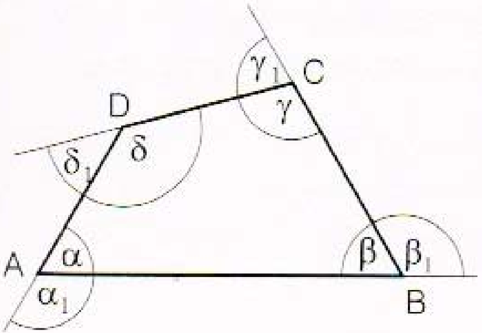
Значајне тачке троугла

- Центар **описане** кружнице (тачка пресека симетрала страница).
- Центар **уписане** кружнице (тачка пресека симетрала углова).
- **Ортоцентар** (тачка пресека висина).
- **Тежиште** (тачка пресека тежишних линија).

Подударност троуглова

- *Први став (СУС):* Два троугла су подударна ако имају једнаке две странице и угао између њих.
- *Други став (УСУ):* Два троугла су подударна ако имају једнаке по једну страницу и на њој два налегла угла.
- *Трећи став (ССУ):* Два троугла су подударна ако имају једнаке по две странице и угао наспрам веће од њих.
- *Четврти став (ССС):* Два троугла су подударна ако су странице једног троугла подударне одговарајућим страницама другог троугла.

ЧЕТВОРОУГАО



$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°;$$

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=360°;$$

$$\alpha+\alpha_1=180°;\ \alpha=180°-\alpha_1$$

- *Паралелограм* је четвороугао чије су наспрамне странице једнаке.
- *Трапез* је четвороугао који има један пар паралелних страница.
- Наспрамни углови паралелограма су једнаки.
- Дијагонале паралелограма се полове.
- Четвороугао је *тангентни* ако се у њега може уписати кружница (услов: AB + CD = AD + BC).
- Четвороугао је *тетивни* ако се око њега може описати кружница (услов: $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$).

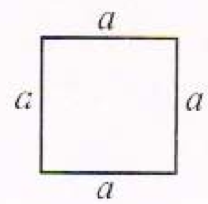
ОБИМ И ПОВРШИНА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФИГУРА

Правоугаоник

$$O=2\cdot(a+b)$$

$$P=a\cdot b$$

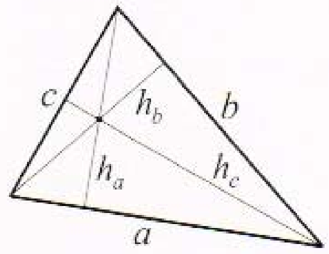
Квадрат



$$O=4a$$

$$P=a\cdot a=a^2$$

Троугао

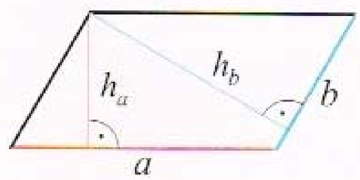


$$O=a+b+c,$$

$$P=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2},$$

$$a=\frac{2\cdot P}{h_a},\quad b=\frac{2\cdot P}{h_b},\quad c=\frac{2\cdot P}{h_c}$$

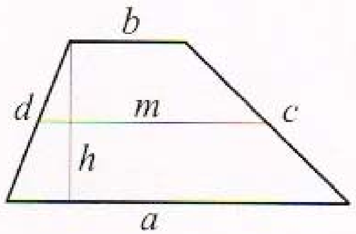
Паралелограм



$$O=2\cdot(a+b);\quad h_a=\frac{P}{a};$$

$$P=a\cdot h_a=b\cdot h_b;\quad a=\frac{P}{h_a}$$

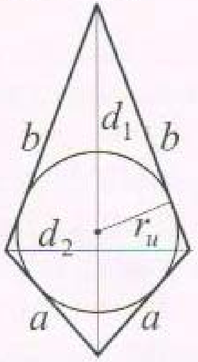
Трапез



$$O=a+b+c+d;\quad m=\frac{a+b}{2};$$

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h;\quad P=m\cdot h$$

Делтоид

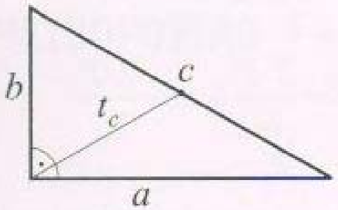


$$O = 2\cdot(a+b);\quad P = \frac{d_1\cdot d_2}{2} = \frac{O\cdot r_u}{2};$$

$$r_u = \frac{P}{a+b};\quad d_1 = \frac{2P}{d_2};\quad d_2 = \frac{2P}{d_1}$$

ПРИМЕНА ПИТАГОРИНЕ ТЕОРЕМЕ

Правоугли троугао



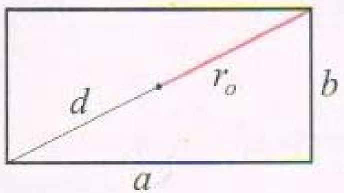
$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad t_c = \frac{c}{2} = r_o$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \qquad O = a + b + c$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$P = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$$

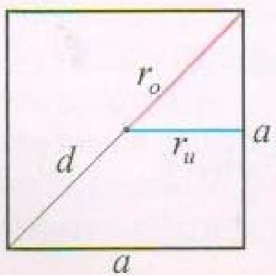
Правоугаоник



$$d^2 = a^2 + b^2;\quad O = 2\cdot(a+b);$$

$$P = a\cdot b;\quad r_o = \frac{d}{2}$$

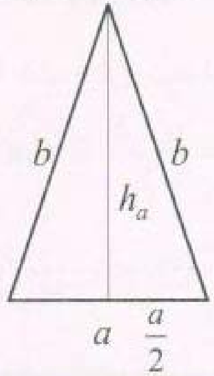
Квадрат



$$d = a\sqrt{2},\quad a = \frac{d\sqrt{2}}{2},$$

$$O = 4a,\quad P = a^2 = \frac{d^2}{2},\quad r_u = \frac{a}{2},\quad r_o = \frac{d}{2}$$

Једнакокраки троугао

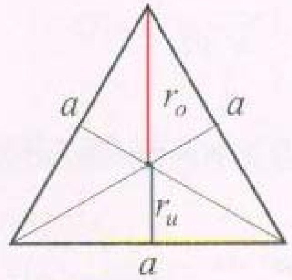


$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,\quad b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h_a^2,\quad O = a + 2\cdot b,$$

$$P = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2}$$

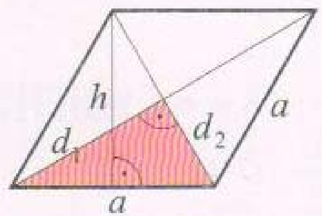
Једнакостранични троугао



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},\quad O = 3a,\quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$r_o = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3},\quad r_u = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

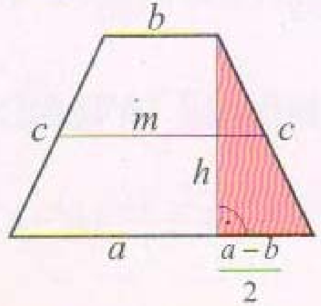
Ромб



$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2,\quad r_u = \frac{h}{2},$$

$$O = 4a,\quad P = \frac{d_1\cdot d_2}{2} = a\cdot h$$

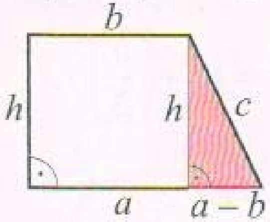
Једнакокраки трапез



$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\quad O = a + b + 2c,$$

$$m = \frac{a+b}{2},\quad P = \frac{a+b}{2}\cdot h = m\cdot h$$

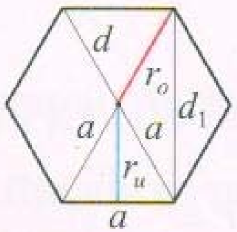
Правоугли трапез



$$h^2=c^2-(a-b)^2\ ,\quad O=a+b+c+h\ ,$$

$$(a-b)^2=c^2-h^2\ ,\quad P=\frac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h$$

Правилан шестоугао

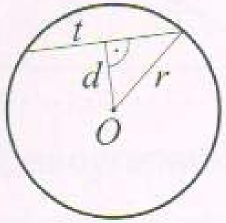


$$r_o=a\ ,\quad r_u=\frac{a\sqrt{3}}{2}\ ,$$

$$d=2a\ ,\quad d_1=a\sqrt{3}\ ,$$

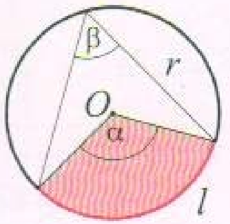
$$O=6a\ ,\quad P=\frac{3}{2}\cdot a^2\sqrt{3}$$

КРУГ И ДЕЛОВИ КРУГА



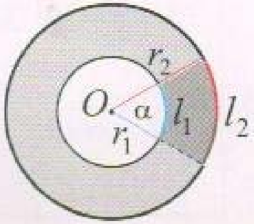
$$r^2=d^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2\ ,\quad d^2=r^2-\left(\frac{t}{2}\right)^2\ ,$$

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2=r^2-d^2$$



$$\alpha=2\beta\ ,\quad \beta=\frac{\alpha}{2}\ ,\quad O=2r\pi\ ,$$

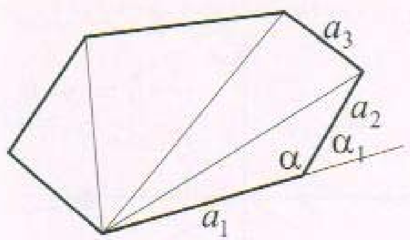
$$P=r^2\pi\ ,\quad l=\frac{r\pi\alpha}{180^\circ}\ ,\quad P_{is}=\frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}=\frac{l\cdot r}{2}$$



$$P_{pr.}=\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)\ ,\quad r_2>r_1\ ,$$

$$P_{pr.i}=\frac{\pi\alpha}{360^\circ}\left(r_2^2-r_1^2\right)=\frac{l_2+l_1}{2}\left(r_2-r_1\right)$$

МНОГОУГАО



$$d_n=n-3\ ,\quad D_n=\frac{n\cdot(n-3)}{2}\ ,$$

$$O=a_1+a_2+\ldots+a_n\ ,$$

$$S_n=(n-2)\cdot 180^\circ$$

Правилан многоугао

$$O=n\cdot a\ ;\quad P=\frac{n\cdot a\cdot r_u}{2}=\frac{O\cdot r_u}{2}\ ;\quad \alpha=\frac{S_n}{n}\ ;\quad \alpha_1=\frac{360^\circ}{n}$$

КВАДРАТНИ КОРЕН

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a,\ a\ge 0\\-a,\ a<0\end{cases}$$

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ ,\quad a\ge 0\ ,\quad b\ge 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ ,\quad a\ge 0\ ,\quad b>0$$

СТЕПЕН

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ ;\quad a^m:a^n=a^{m-n}\ ,\quad a\ne 0\ ;\quad \left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}\ ;$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\ ;\quad a^n:b^n=(a:b)^n\ ,\quad b\ne 0\ ;\quad a^0=1\ ,\quad a\ne 0$$

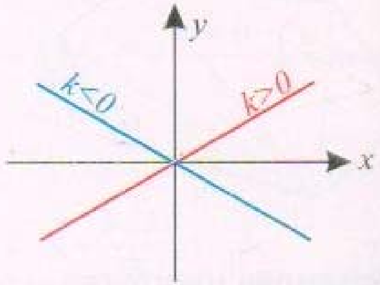
КВАДРАТ БИНОМА И РАЗЛИКА КВАДРАТА

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\ ,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2\ ,$$

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$$

ФУНКЦИЈА

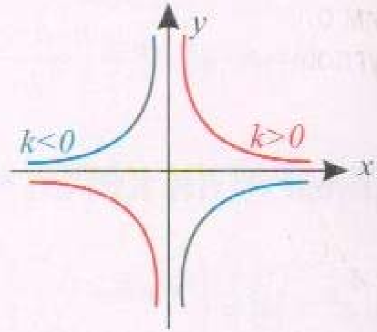
Директне пропорционалности



$y = kx\ ,\ \ k \neq 0\ ,\ \ x \in R$

Растућа за $k > 0$
Опадајућа за $k < 0$
График функције је права

Обрнуте пропорционалности



$y = \frac{k}{x}\ ,\ \ k \neq 0\ ,\ \ x \neq 0$

График функције је хипербола

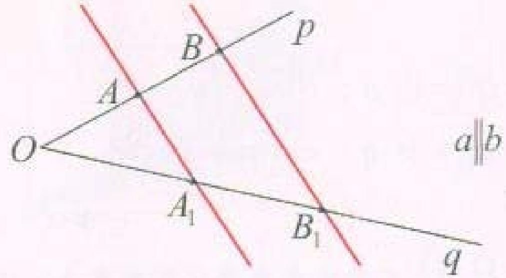
Растојање $|AB|$ тачака $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Линеарна функција $y = kx + n\ ,\ \ k, n \in R\ ,\ \ k \neq 0$

1) Растућа за $k > 0$ ($y\nearrow$); опадајућа за $k < 0$ ($y\searrow$);
2) Пресек са Ox -осом (нула ф-је) за $y = 0\ ,\ \ x = -\frac{n}{k}$;
3) Пресек са Oy -осом за $x = 0,\ y = n$;
4) График функције је права;
5) Услов паралелности двеју правих је једнакост коефицијената правца ($k_1 = k_2$).

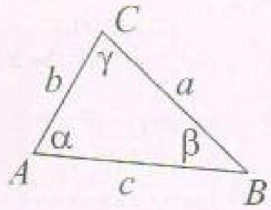
ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА И СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА



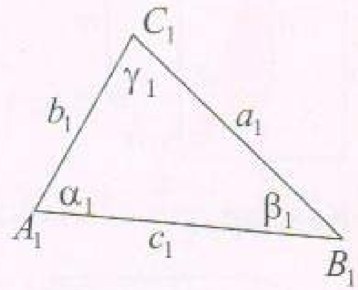
$a \| b$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{AA_1}{BB_1}$$

- Два троугла (многоугла) су **сличнa** онда и само онда када су им одговарајуће странице пропорционалне и одговарајући углови једнаки.



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



$\alpha = \alpha_1\ ,\ \ \beta = \beta_1\ ,\ \ \gamma = \gamma_1$

$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = k$ - коефицијент сличности

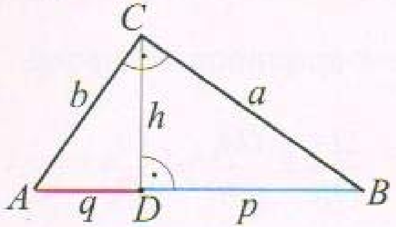
- Обими сличних троуглова (многоуглова) се односе као одговарајуће странице:

$$O : O_1 = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = k$$

- Површине сличних троуглова (многоуглова) се односе као квадрати одговарајућих страница:

$$P : P_1 = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2 = k^2$$

Примена сличности на правоугли троугао

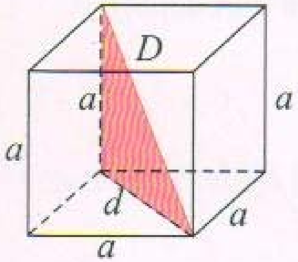


$a^2 = c \cdot p \, ; \; b^2 = c \cdot q$

$h^2 = p \cdot q \, ; \; c = p + q$

ПРИЗМА: $P=2B+M, \quad V=B\cdot H$

Коцка

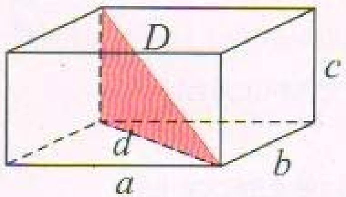


$d = a\sqrt{2} \, , \; D = a\sqrt{3} \, ,$

$P = 6 \cdot a^2 \, , \; V = a^3 \, ,$

$P_{dp} = d \cdot a = a^2\sqrt{2} \, , \; m = \rho \cdot V$

Квадар

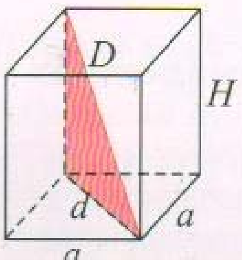


$d = \sqrt{a^2 + b^2} \, , \; D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \, ,$

$P = 2(ab + ac + bc) \, , \; V = abc$

$P_{dp} = d \cdot c$

Правилна четворострана призма

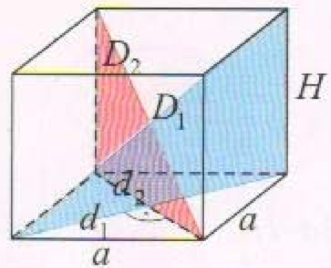


$d = a\sqrt{2} \, , \; D = \sqrt{d^2 + H^2} \, , \; P_{dp} = d \cdot H \, ,$

$B = a^2 \, , \; M = 4a \cdot H \, ,$

$P = 2a \cdot (a + 2H) \, , \; V = a^2 \cdot H$

Призма (основа ромб)

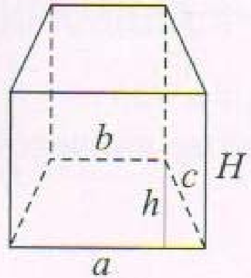


$D_1^2 = d_1^2 + H^2 \, , \; D_2^2 = d_2^2 + H^2 \, ,$

$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot h \, , \; M = 4a \cdot H \, ,$

$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \, , \; P = d_1 \cdot d_2 + 4a \cdot H \, , \; V = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot H$

Призма (основа једнакокраки трапез)

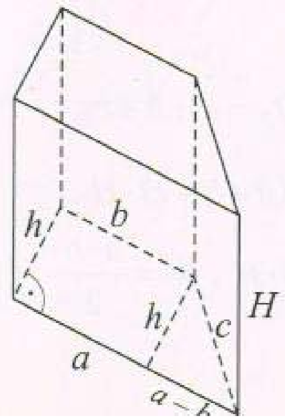


$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \, , \; B = \frac{a+b}{2} \cdot h \, ,$

$M = (a + b + 2c) \cdot H \, , \; V = \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot H \, ,$

$P = (a + b) \cdot h + (a + b + 2c) \cdot H$

Призма (основа правоугли трапез)



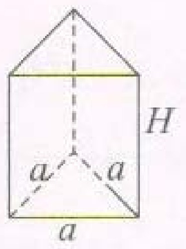
$h^2 = c^2 - (a - b)^2 \, , \; B = \frac{a+b}{2} \cdot h \, ,$

$M = (a + b + c + h) \cdot H \, ,$

$P = (a + b) \cdot h + (a + b + c + h) \cdot H \, ,$

$V = \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot H$

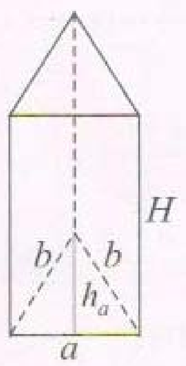
Правилна тространа призма



$$B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ ,\ \ M=3a\cdot H\ ,\ \ h=\frac{a\sqrt{3}}{2}\ ,$$

$$O_B=3a\ ,\ \ P=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3a\cdot H\ ,\ \ V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$$

Призма (основа једнакокраки троугао)

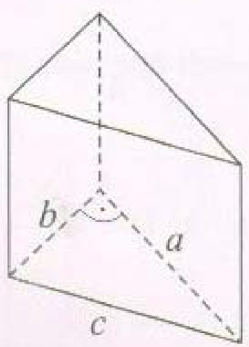


$$h_a^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\ ,\ \ B=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}\ ,$$

$$M=(a+2b)\cdot H\ ,\ \ O_B=a+2b\ ,$$

$$P=a\cdot h_a+(a+2b)\cdot H\ ,\ \ V=\frac{a\cdot h_a}{2}\cdot H$$

Призма (основа правоугли троугао)

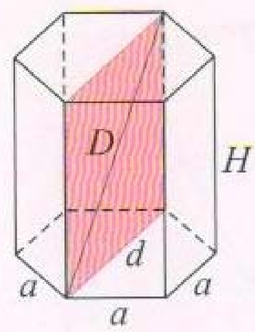


$$B=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}\ ,\ \ O_B=a+b+c\ ,$$

$$c^2=a^2+b^2\ ,\ \ M=(a+b+c)\cdot H\ ,$$

$$P=a\cdot b+(a+b+c)\cdot H\ ,\ \ V=\frac{a\cdot b}{2}\cdot H$$

Правилна шестострана призма



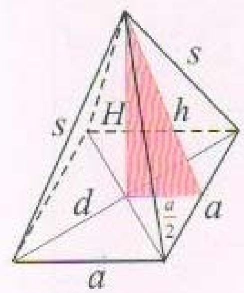
$$d=2a\ ,\ \ D^2=d^2+H^2\ ,\ \ P_{dp}=d\cdot H\ ,$$

$$B=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\ ,\ \ M=6a\cdot H\ ,$$

$$P=3a^2\sqrt{3}+6a\cdot H\ ,\ \ V=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot H$$

ПИРАМИДА: $P=B+M,\quad V=\frac{1}{3}B\cdot H$

Правилна четворострана пирамида



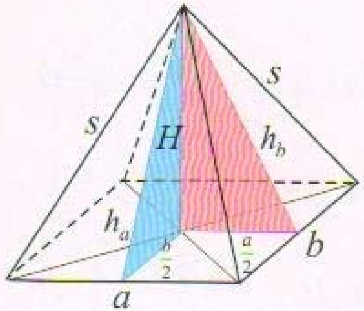
$$H^2=s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\ ,\ \ h^2=s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\ ,$$

$$h^2=H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\ ,\ \ d=a\sqrt{2}\ ,$$

$$P_{dp}=\frac{1}{2}d\cdot H\ ,\ \ B=a^2\ ,$$

$$M=2a\cdot h\ ,\ \ P=a\cdot(a+2h)\ ,\ \ V=\frac{1}{3}a^2\cdot H$$

Пирамида (основа правоугаоник)



$$H^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 ,\ d^2 = a^2 + b^2 ,$$

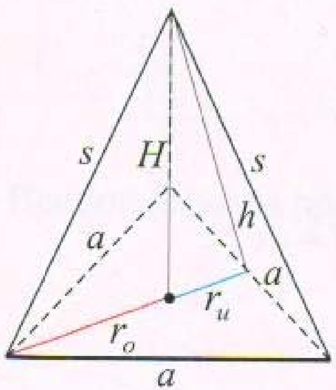
$$h_a^2 = H^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 ,\ h_a^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 ,$$

$$h_b^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 ,\ h_b^2 = s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 ,$$

$$B = a \cdot b ,\ M = a \cdot h_a + b \cdot h_b ,$$

$$P = a \cdot b + a \cdot h_a + b \cdot h_b ,\ V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot H$$

Правилна тространа пирамида



$$h^2 = H^2 + r_u^2 ,\ h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 ,$$

$$H^2 = s^2 - r_o^2 ,\ r_u = \frac{a\sqrt{3}}{6} ,$$

$$r_o = \frac{a\sqrt{3}}{3} ,\ B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} ,$$

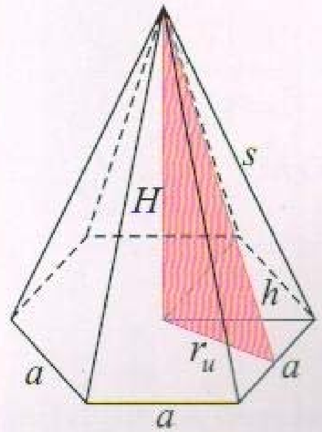
$$O_B = 3a ,\ M = \frac{3a \cdot h}{2} ,$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a \cdot h}{2} ,\ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Једнакоивична тространа пирамида (правилни тетраедар):

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3} ,\ P = a^2\sqrt{3} ,\ V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$$

Правилна шестострана пирамида



$$d = 2a ,\ r_u = \frac{a\sqrt{3}}{2} ,\ H^2 = s^2 - a^2 ,$$

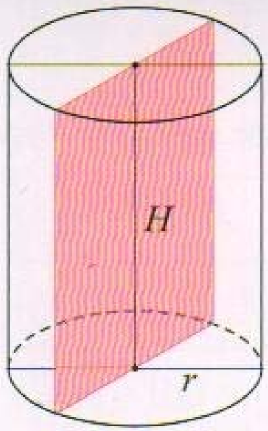
$$h^2 = H^2 + r_u^2 ,\ h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 ,$$

$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} ,\ M = 3a \cdot h ,$$

$$O_B = 6a ,\ P_{dp} = \frac{d \cdot H}{2} ,$$

$$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot h ,\ V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

ВАЉАК: $P=2B+M$, $V=B \cdot H$



$$O_B = 2r\pi ,\ B = r^2\pi ,$$

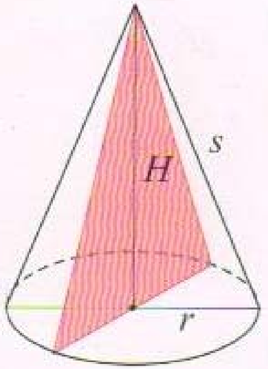
$$M = 2r\pi \cdot H ,\ P_{op} = 2r \cdot H ,$$

$$P = 2r\pi \cdot (r + H) ,\ V = r^2\pi \cdot H$$

Равнострани ваљак ($H=2r$):

$$P_{op} = H^2 = 4r^2 ,\ P = 6r^2\pi ,\ V = 2r^3\pi$$

КУПА: $P=B+M$, $V=\frac{1}{3}B\cdot H$



$H^2=s^2-r^2$, $P_{op}=r\cdot H$,

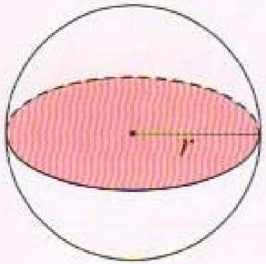
$B=r^2\pi$, $M=r\pi s$,

$P=r\pi(r+s)$, $V=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot H$

Равнострана купа ($s=2r$):

$P=3r^2\pi$, $V=\frac{1}{3}r^3\sqrt{3}\pi$

ЛОПТА



Површина великог лоптиног круга:

$P_{V.L.K.}=r^2\pi$

Површина лопте: $P=4r^2\pi$

Запремина лопте: $V=\frac{4}{3}r^3\pi$

n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1
2	4	1,41
3	9	1,73
4	16	2
5	25	2,24
6	36	2,45
7	49	2,65
8	64	2,83
9	81	3
10	100	3,16
11	121	3,32
12	144	3,46
13	169	3,61
14	196	3,74
15	225	3,87

n	n^2	$\sqrt{n}$
16	256	4
17	289	4,12
18	324	4,24
19	361	4,36
20	400	4,47
21	441	4,58
22	484	4,69
23	529	4,80
24	576	4,90
25	625	5
26	676	5,10
27	729	5,20
28	784	5,29
29	841	5,39
30	900	5,48