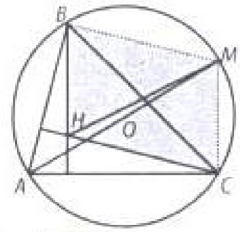
VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

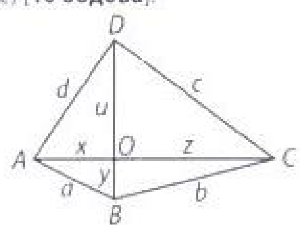


1. (**МЛ 51/4**) Како је $BH \perp CA$ (висина троугла) и $MC \perp CA$ ($\measuredangle MCA$ је над пречником), то је $BH \parallel MC$ (слика). Слично је $CH \parallel MB$, па је четвороугао $BMCH$ паралелограм. Одатле следи да су троуглови BCH и BCM подударни (ССС), па имају једнаке површине [**20 бодова**].

2. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ [**4 + 4 + 4 бода**] $=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$ [**8 бодова**]. Дакле, дати број је рационалан.

3. а) Како је $2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7 = 2^{20} \cdot 3^7$ [**5 бодова**], то дати број има $21 \cdot 8 = 168$ делилаца [**5 бодова**].
б) Како је $2^{20} \cdot 3^7 = (2^3)^6 \cdot 2^2 \cdot (3^3)^2 \cdot 3$, то дати број има $7 \cdot 3 = 21$ делилац који је куб неког природног броја [**10 бодова**. Ако се задатак решава набрајањем делилаца, за 1–14 набројаних 0 бодова, за 15–20 набројаних 5 бодова, за све набројане 10 бодова].

4. Нека је O тачка пресека дијагонала четвороугла $ABCD$ чије су странице $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$. Означимо дужине дужи AO, BO, CO, DO редом са x, y, z, u. Тада је $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $c^2 = z^2 + u^2$, $d^2 = u^2 + x^2$. Следи да је $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2 + d^2$ [**10 бодова**]. Одавде закључујемо да ће четвороугао са дијагоналом дужине $\sqrt{x^2+y^2+z^2+u^2}$ и страницама дужине a и c са једне стране те дијагонале и страницама b и d са друге стране те дијагонале имати два права угла (у крајевима друге дијагонале) [**10 бодова**].



5. *Прво решење*: Из услова задатка следи да је последња цифра броја $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ цифра 5. Самим тим и последња цифра броја $n + 1$ је једнака 5 [**10 бодова**], па је $n + 1 = 10k + 5$, за неко $k \in N_0$. Квадрирањем добијамо да је $(n + 1)^2 = (10k + 5)^2 = 100k^2 + 100k + 25$, што значи да је двоцифрени завршетак броја $(n + 1)^2$ једнак 25, а броја $n^2 + 2n$ је 24. Дакле, цифра десетица броја $n^2 + 2n$ је 2 [**10 бодова**].
Друго решење. Производ $n(n + 2)$ се завршава цифром 4, што је могуће једино у случају да се n завршава цифром 4 (а $n + 2$ цифром 6) [**10 бодова**]. Дакле, мора бити $n = 10k + 4$, $n + 2 = 10k + 6$, па је $n(n + 2) = (10k + 4)(10k + 6) = 100(k^2 + k) + 24$, па се број $n^2 + 2n$ завршава са 24, тј. цифра десетица му је 2 [**10 бодова**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
25.03.2018.

VIII разред

1. На табли је написано неколико позитивних реалних бројева од којих је сваки једнак једној деветини збира осталих бројева. Колико је бројева написано на табли?

2. Одреди све целе бројеве n за које је број $\dfrac{2n+1}{3n-1}$ такође цео.

3. Правилна четворострана призма и правилна четворострана пирамида имају једнаке основе, површине и запремине. Ако је површина основе 100cm^2, израчунај висине та два тела.

4. Права која садржи средиште M крака AD трапеза $ABCD$, дели трапез на два дела једнаких површина и сече други крак у тачки N. Израчунај однос $BN : NC$ у зависности од дужина основица $AB = a$, $CD = b$.

5. Да ли се за неки природан број n збир првих n природних бројева може завршавати са 2018?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.